

Ministerul Învățământului
Universitatea "POLITEHNICA" București
Facultatea de Electrotehnică

CÂMPUL ELECTROMAGNETIC AL CORPURILOR ÎN MIȘCARE

TEZĂ DE DOCTORAT

Autor:
Ing. Gabriel PREDA

Conducător științific:
Prof.Dr.Doc.Ing. Constantin MOCANU

București
1998

Mulțumiri

Începând să pregătesc această lucrare, nu știam câte dificultăți voi întâmpina pe parcurs. Țin să mulțumesc celor care, fiind alături de mine, au făcut posibilă finalizarea acestei teze.

Mulțumesc în primul rând domnului Profesor Dr. Doc. Ing. Constantin I. Mocanu, îndrumătorul științific al tezei. Mai întâi, îi mulțumesc pentru că a avut generozitatea să mă îndrume către o temă de cercetare atât de dificilă și pasionantă, în același timp. Apoi, pentru că exigența, rigoarea și spiritul pătrunzător al domniei sale au modelat de la început lucrarea mea, impunându-i un anumit stil științific.

Țin să mulțumesc în mod deosebit domnului Profesor Dr. Ing. Florea Ioan Hănțilă, care a fost, de la început și până la redactarea finală a tezei gata mereu să răspundă întrebărilor mele, sa-mi ofere soluții și deschideri teoretice, să-mi îndrume pașii în domeniul calculului numeric. Lucrările care stau la baza acestei teze sunt dezvoltate în colaborare cu domnia sa. Contribuția domniei sale este mai mult decât substanțială la pregătirea și redactarea acestei teze.

Mulțumesc domnului Profesor Dr. Ing. Augustin Moraru, pentru sfaturile și îndemmurile cu privire la forma și redactarea tezei, pentru observațiile și pentru acele întrebări pe care, mulțumită domniei-sale, am ajuns să mi le pun.

O mare pondere în această teza o au aplicațiile numerice. Fără sprijinul necondiționat, asistența permanentă și condițiile deosebite asigurate de întreg colectivul Laboratorului de Metode Numerice și în primul rând, Profesorul Dr. Ing. Ioan Daniel, șeful acestui laborator, munca mea ar fi fost mult mai dificilă. Apreciez în mod deosebit șansa de a utiliza resursele software și hardware din acest laborator. Mulțumesc doamnelor Dr. Ing. Irina Munteanu și Drd. Ing. Gabriela Ciuprina pentru constantul sprijin acordat și pentru că mi-au inoculat virusul \LaTeX .

Aplicațiile paralele prezentate în anexă au fost dezvoltate pentru prima oară în laboratorul domnului Profesor Guglielmo Rubinacci, de la Universitatea din Cassino. Deasemenea, o parte din rezultatele prezentate în teză se bazează pe lucrări publicate împreună cu domnia sa. Niciodată nu îi voi putea mulțumi cu adevărat pentru ceea ce m-a învățat și pentru ceea ce mi-a dăruit.

O parte din rezultatele prezentate în teză sunt obținute folosind resursele de calcul oferite de domnul Profesor Dr. Doc. Ing. Andrei Țugulea. Ii mulțumesc și pe această cale, sperând să-i pot arăta mereu recunoștința mea. Datoresc mulțumiri domnilor Drd. Ing. Ioan Gheorma și Dr. Ing. Cornel Petrache, care mi-au pus la dispoziție programele de calcul ale domniilor lor, pe baza cărora am realizat primele versiuni ale preprocesoarelor folosite în aplicațiile numerice. Sfaturile și asistența lor prietenească mi-au oferit de multe ori soluția căutată ori limpezimea de spirit pentru a o găsi singur. Domnului Bogdan Crânganu-Crețu îi mulțumesc pentru spiritul de fair-play și competiție științifică pe care a reușit să mi-l transmită.

Fără sprijinul constant al familiei mele și în primul rând al soției mele Cristina nu aș fi încheiat niciodată această muncă.

Tuturor celor menționați și multor altora, pe care nu i-am numit aici, le mulțumesc.

Cuprins

1	Introducere	7
2	Formularea problemei de calcul al câmpului electromagnetic pentru medii în mișcare și corpuri supraconductoare	11
2.1	Ecuatiile din domeniul de calcul	11
2.2	Condițiile de trecere (CT)	12
2.3	Condițiile de frontieră (FR)	12
2.4	Condițiile inițiale (CI)	14
2.5	Teoremă de unicitate	14
3	Metode numerice de calcul pentru regimul cvasistationar	17
3.1	Metode diferențiale	17
3.1.1	Formularea în $\mathbf{A} - V, \mathbf{A}$	18
3.1.2	Formularea în $\mathbf{A} - V, \Phi$	20
3.1.3	Formularea în $(\mathbf{A} - V, \mathbf{A} - \phi)$	21
3.1.4	Formularea în $\mathbf{T} - \Omega$	23
3.1.5	Formularea în $\mathbf{T} - \Psi, \Phi$	24
3.1.6	Formularea în $(\mathbf{T} - \Psi, \Phi, \mathbf{A})$	25
3.1.7	Formularea în $(\mathbf{A} - \Psi - \Phi)$	26
3.1.8	Formularea în $\mathbf{A}^* - \phi$	27
3.2	Metode <i>BEM - FEM</i>	29
3.2.1	Formularea electrică	29
3.2.2	Formularea magnetică	30
3.3	Metode hibride	31

3.3.1	Formularea în \mathbf{H}	32
3.3.2	Formularea în \mathbf{B}	32
3.4	Metoda integrală Albanese-Rubinacci	33
3.5	Comparație între metodele prezentate	34
4	Câteva aspecte privind tratarea problemelor de curenți turbionari în medii în mișcare	37
4.1	Metode diferențiale sau integrale; sistem de referință fix sau mobil	37
4.2	Câteva aplicații numerice în probleme cu medii în mișcare	39
5	Ecuția integrală a densității de curent în medii conductoare, în mișcare	43
5.1	Ecuția integrală a curenților turbionari	43
5.1.1	Potențialul electric vector	44
5.1.2	Soluția lui Galerkin pentru ecuația curenților turbionari	45
5.1.3	Elemente de muchie și condiția de etalonare topologică	46
5.2	Rezolvarea numerică a ecuației de curenți turbionari în medii conductoare	49
5.2.1	Alegerea arborelui pentru domenii simplu conexe	49
5.2.2	Calculul termenului R_{ik}	50
5.2.3	Calculul termenului L_{ik}	51
5.2.4	Calculul termenului U_k	54
6	Ecuția curenților turbionari în medii neliniare magnetic, în mișcare	55
6.1	Tratarea neliniarității	55
6.2	Ecuția integrală a curenților turbionari pentru medii neliniare - formularea în potențial vector \mathbf{T}	57
6.2.1	Corecția iterativă a magnetizației	58
6.3	Ecuția integrală a curenților turbionari pentru medii neliniare - formularea în \mathbf{T} integral	59
6.3.1	Corecția magnetizației	60
6.4	Calculul termenilor sistemului	60
6.4.1	Calculul termenilor V_k , \mathbf{a}_{kp} , și β_{ip}	60
6.4.2	Calculul termenilor $\bar{\gamma}_{ip}$	63

<i>Cuprins</i>	5
7 Calculul forțelor în regim cuasistaționar	67
7.1 Metoda derivării coenergiei	67
7.2 Forța nodală	68
7.3 Metoda tensorului tensiunilor maxwelliene	69
8 Rezultate numerice	73
8.1 Exemplul 1: O spiră dreptunghiulară străbătută de curent constant în mișcare cu viteză impusă constantă deasupra unei plăci subțiri conductoare	74
8.2 Exemplul 2: Două corpuri conductoare în mișcare în preajma unei spire conductoare străbătută de curent impus cu variație rampă	77
8.3 Exemplul 3: Un corp conductor în mișcare cu viteză impusă deasupra unui ansamblu format dintr-o spiră și un corp masiv conductor	80
8.4 Exemplul 4: Două plăci feromagnetice plasate în preajma unei spire parcurse de curent variabil rampă	85
8.5 Exemplul 5: Un magnet în mișcare cu viteză impusă în preajma unei plăci feromagnetice	85
9 Concluzii	89
9.1 Concluzii generale	89
9.2 Contribuții originale	89
9.3 Concluzii finale	90
Anexe	91
A Calculul integralei $\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{N}_k \text{grad} V dv = 0$	93
B Definiția numărului Peclet în electromagnetism; tehnica "up-winding"	95
C Definiția numărului Courant	99
D Rezolvarea numerică a sistemului de ecuații	101
E Pachetul de programe de calcul	105
F Implementarea paralelă folosind MPI a procedurii de calcul a termenilor sistemului	107
Bibliografie	112

Capitolul 1

Introducere

Una din cele mai importante tendințe în domeniul calculului numeric pentru regim cvasistaționar a fost definită de C.W. Trowbridge, președintele Societății COMPUMAG și al Vector Fields Ltd. la ediția din 1995 de la Berlin a COMPUMAG-ului. Trowbridge a prezentat rezultatele cercetărilor din ultimii aniși tendințele majore până în anul 2000. Prima direcție indicată era "3D analysis with rigid body motion - the use of integral methods and parallel processing" (analiza tridimensională pentru corpuri rigide în mișcare - utilizarea metodelor integrale și calculul paralel).

Posibilitatea utilizării metodelor integrale pentru analiza corpurilor tridimensionale în mișcare, cu sistemele de referința atașate corpurilor, considerând medii neliniare și calculând forța și cuplul care acționează asupra corpurilor mobile folosind tensiuni maxwelliene este într-adevăr o soluție al cărei viitor pare asigurat de dezvoltarea metodelor de paralelizare a calculului în sisteme distribuite.

În această lucrare prezint o metodă de calcul pentru curenți turbionari în medii neliniare în mișcare, bazată pe o formulare integrală.

Precizez mai întâi, în Capitolul 2 ecuațiile din domeniul de calcul, cu condițiile pe frontieră și de trecere pentru problema de curenți turbionari în corpuri în mișcare, în care sursele pot fi și bobine supraconductoare. Pentru problema astfel formulată, enunț și demonstrez o teoremă de unicitate a soluției.

Tratarea numerică a problemelor de curenți turbionari e prezentată în Capitolul 3, în formulările duale, de tip electric și magnetic, folosind mărimile de câmp sau potențialele acestora. Prezentarea metodelor de calcul numeric pentru regim cvasistaționar, grupate în formulări diferențiale, mixte (BEM-FEM), hibride și integrale, nu am făcut-o dintr-o perspectivă istorică, adică încercând să surprind evoluția lor în timp, ci mai degrabă am încercat să schițez o hartă pe care aceste metode ocupă fiecare un teritoriu bine definit, punând în evidență domeniul de aplicare al fiecăreia, avantajele și punctele sale slabe.

Unele avantaje ale metodelor integrale capătă și mai mult relief în raport cu cele diferențiale în cazul aplicațiilor în care intervine mișcarea. Pentru aplicații în care intervin doar corpuri rigide, folosirea unei metode integrale pare să fie o soluție foarte bună. Dacă

se lucrează cu sisteme de referință atașate corpurilor în mișcare, soluția sistemului de ecuații rezultat este stabilă, chiar și pentru viteze mari. Am încercat să grupez în Capitolul 4 câteva argumente în favoarea folosirii metodelor integrale. Câteva aplicații prezentate în literatura de specialitate, incluzând dispozitive de frânare electromagnetică, lansatoare electromagnetice, trenuri cu suspensie magnetică, rulmenți fără contact sunt trecute în revistă în același Capitol.

În Capitolul 5 introduc formularea problemei de curenți turbionari în corpuri conductoare în mișcare, sursele fiind bobine filiforme, care pot fi și supraconductoare. Se scrie legea inducției electromagnetice în sisteme de referință atașate corpurilor în mișcare, valoarea potențialului magnetic vector fiind calculată cu relația Biot-Savart-Laplace în funcție de curenții turbionari și curenții sursă. Formularea folosește potențialul electric vector \mathbf{T} și o condiție de etalonare topologică. Din punct de vedere numeric, folosesc o discretizare cu tetraedre a domeniilor conductoare, elemente de muchie asociate corzilor coarborelui interior asociat muchiilor grafului rețelei de discretizare și o procedură Galerkin. Metoda este o dezvoltare a procedurii Albanese-Rubinacci pentru medii în mișcare. Datorită mișcării, o parte din termenii matricii sistemului de ecuații trebuie recalculată la fiecare pas de timp iar vectorul termenilor liberi trebuie recalculat de fiecare dată integral. Includerea mișcării în dependența de timp a acestor termeni este rezultatul folosirii sistemelor de referință locale, atașate corpurilor în mișcare. Una din problemele importante în formularea integrală folosită este calculul termenilor sistemului cu precizie și cu un efort de calcul cât mai mic. Soluțiile de optimizare, din acest punct de vedere, a acestui calcul, sunt prezentate tot în acest capitol.

Dezvoltarea acestei metode pentru medii neliniare folosește rezultatele publicate de Albanese, Hăntilă și Rubinacci. Tratarea neliniarității se face înlocuind mediile feromagnetice cu un mediu de permeabilitate omogenă, egală cu cea a aerului (pentru a putea folosi relația Biot-Savart-Laplace) și având o magnetizație care se corectează iterativ. La fiecare pas de timp și iterație neliniară se rezolvă astfel o problemă liniară. Dacă se consideră o variație liniară a densității de curent pe un pas de timp, variația inducției câmpului magnetic este tot liniară, în schimb dependența magnetizației de inducție este neliniară. Dacă în schimb considerăm că inducția variază în trepte, la fiecare pas de timp, valoarea ei este constantă pe un pas de timp iar magnetizația calculată de exemplu pentru mijlocul intervalului de timp nu mai este o valoare medie pe pasul de timp (care nu poate fi calculată precis) ci chiar valoarea pentru acel pas de timp. De aceea am introdus o nouă formulare, folosind potențialul vector electric integrat în timp. Dacă T — *integral* variază liniar pe un pas de timp, \mathbf{T} și deci \mathbf{J} și \mathbf{E} variază în trepte și deci și \mathbf{B} variază în trepte. În Capitolul 6 prezint cele două formulări, în \mathbf{T} și în \mathbf{T} — *integral* pentru probleme neliniare și procedurile de calcul pentru termenii matricii sistemului.

Pentru aplicații în care viteza nu este impusă ci trebuie determinată la fiecare pas de timp prin rezolvarea ecuației mecanice, calculul forțelor trebuie făcut cu o metodă precisă și rapidă. Pentru aplicații cu corpuri rigide mobile, am utilizat metoda integrării tensorului tensiunilor maxwelliene pe o suprafață ce trece prin aer, înglobând corpul asupra căruia se exercită forța calculată. În Capitolul 7 am prezentat și procedura de calcul numerică pentru forță.

Rezultatele testelor numerice sunt prezentate în Capitolul 8. Comparația cu rezultate analitice pentru unele din problemele test arată o eroare mică a rezultatelor numerice față de acestea.

Posibilitățile de creștere a vitezei de calcul folosind paralelizarea aplicației prezentate aici sunt dezvoltate în una din anexele lucrării. Dezvoltările ulterioare ale metodei pot include dezvoltarea unui solver paralel, tratarea domeniilor multiplu conexe, tratarea neliniarității $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ în materialele supraconductoare, calculul problemei cuplate electromagnetice și mecanică.

Capitolul 2

Formulara problemei de calcul al câmpului electromagnetic pentru medii în mișcare și corpuri supraconductoare

În aplicațiile pe care urmărim să le tratăm este dezvoltată o metodă integrală pentru calculul curenților turbionari în structuri cu corpuri conductoare în mișcare, sursele fiind bobine supraconductoare. Se prezintă în cele ce urmează ecuațiile câmpului în domeniul de calcul cu condițiile pe frontieră și o teoremă de unicitate a soluției problemei de câmp pentru structuri cu medii în mișcare și bobine supraconductoare.

2.1 Ecuațiile din domeniul de calcul

Fie Ω_S un domeniu supraconductor și Ω_T domeniul exterior lui Ω_S . Domeniul Ω_T este format din medii conductoare $\Omega = \bigcup \Omega_k$ și medii izolante Ω_0 : $\Omega_T = \Omega \cup \Omega_0$. Fiecare domeniu Ω_k este un corp conductor cu o lege de mișcare bine definită. Toate afirmațiile ce vor urma vor fi valabile și dacă în domeniul de calcul sunt corpuri izolante în mișcare. În regimul cvasistaționar avem:

În întreg domeniul Ω_T :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{sau} \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (2.2)$$

În corpurile conductoare Ω_k :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

În corpurile izolatoare Ω_0 :

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (2.7)$$

unde densitatea de curent \mathbf{J}_0 este impusă.

2.2 Condițiile de trecere (CT)

Pe frontiera $\delta\Omega$ a domeniului conductor avem condițiile de trecere:

$$\mathbf{J}_n = 0 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}_t|_\Omega = \mathbf{H}_t|_{\Omega_0} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B}_n|_\Omega = \mathbf{B}_n|_{\Omega_0} \quad (2.10)$$

2.3 Condițiile de frontieră (FR)

Ne propunem să analizăm câmpul electromagnetic în domeniul Ω_T , deci să rezolvăm ecuațiile (2.1) \dots (2.7). Frontiera $\delta\Omega_T$ a domeniului Ω_T conține și suprafețele ce mărginesc corpurile supraconductoare $\delta\Omega_S$. Deci mediile supraconductoare nu fac parte din domeniul de calcul. Frontiera domeniului Ω_T poate fi în mișcare deoarece și corpurile supraconductoare pot fi în mișcare. Mișcarea frontierei poate fi arbitrară. Considerăm că toate corpurile conductoare aflate în mișcare se deplasează în interiorul domeniului Ω_T . Presupunem că pe frontiera $\delta\Omega_T$ avem următoarele condiții pe frontieră:

(α) Pe o parte S' a frontierei se dă componenta tangențială a lui \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{f} \quad (2.11)$$

(β) Pe restul frontierei $S'' = \delta\Omega_T \setminus S'$ se dă componenta normală a lui \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{g} \quad (2.12)$$

(γ) Dacă S' este formată din n suprafețe disjuncte S'_i , atunci pentru $n-1$ din aceste suprafețe se dau fluxurile magnetice:

$$\int_{S'_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.13)$$

(δ) Dacă Ω_T este multiplu conexă atunci fie Ω_S golurile pentru care $\delta\Omega_S \subset S'$. Fie T_{S_k} cu $k = 1, 2, \dots, n$ tăieturile (minimale) ce transformă Ω_T în domeniu simplu conex și fie γ_{S_k} , $k = 1, 2, \dots, n_s$, curbele ce înconjoară golurile (n_s este ordinul de conexitate al domeniului Ω_T iar γ_{S_k} formează "baza" de curbe ce definește acest ordin). Trebuie impusă una din următoarele condiții de frontieră:

$$(\delta') \quad \int_{\gamma_{S_k}} \mathbf{H} d\mathbf{r} = i_{S_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.14)$$

$$(\delta'') \quad \int_{T_{S_k}} \mathbf{B} n dA = \Phi_{S_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (2.15)$$

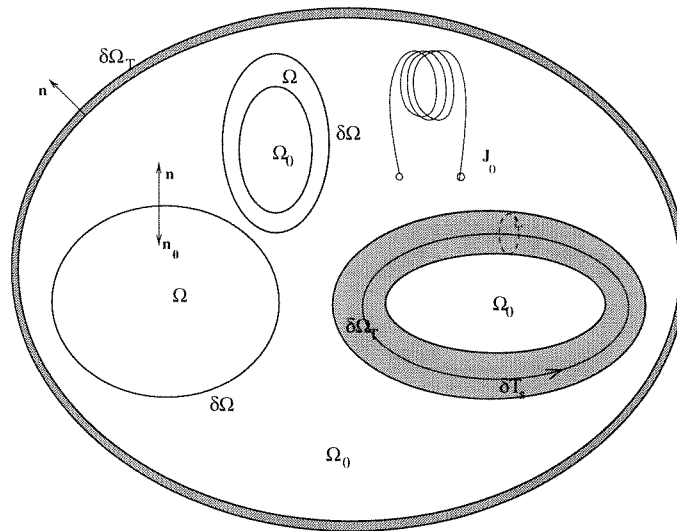


Fig. 2.1: Domeniul de calcul

Observații

1. La suprafața corpurilor supraconductoare avem condiția (β) omogenă: $\mathbf{B}_n = \mathbf{g}$
2. Spirele supraconductoare conduc la condiții de frontieră de tip (δ). Condiția (δ') impune curentul prin spira supraconductoare, în timp ce condiția (δ'') impune fluxul magnetic al spirei supraconductoare.
3. Condiția (δ) poate fi formulată și sub formă hibridă: pentru o parte din spire se dau curenții, adică condiția (δ'), iar pentru cealaltă parte se dau fluxurile magnetice, deci condiția (δ'')

2.4 Condițiile inițiale (CI)

Pentru $t=0$ trebuie cunoscută valoarea inducției magnetice $\mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{B}_i$. Se impune, evident, $\text{div}\mathbf{B}_i = 0$. Dacă regimul este periodic, atunci la ecuațiile (2.1) ··· (2.2) și condițiile de frontieră (FR) se adaugă condiția de periodicitate. Condiția inițială nu este necesară în acest caz. În cazul mediilor în mișcare însă, regimul periodic presupune dificultăți suplimentare de analiză. Determinăm acum numai regimul permanent (periodic) ca o soluție asimptotică de regim variabil cu condiții inițiale arbitrare (de exemplu nule).

2.5 Teoremă de unicitate

Ecuațiile (2.1) ··· (2.7), împreună cu condițiile de trecere (CT), cu condițiile de frontieră (FR) și condițiile inițiale (CI) definesc în mod unic câmpul magnetic (\mathbf{B}, \mathbf{H}).

Demonstrație.

Vom presupune că două câmpuri electromagnetice distincte verifică condițiile de mai înainte și fie $\mathbf{B}_d, \mathbf{H}_d, \mathbf{E}_d, \mathbf{J}_d$ câmpul diferență. Acest câmp verifică relațiile (2.1) ··· (2.7) și are condiții de frontieră și condiții inițiale nule. Datorită condițiilor (α) , (β) , (γ) și (2.1) fluxul lui \mathbf{B} pe ultima suprafața S_n e nul. Notăm:

$$\mathbf{E} = \int_0^t \mathbf{E}_d d\tau$$

unde integrarea în timp se face în același punct din sistemul de coordonate fixat pe corpul în mișcare. Atunci, datorită condițiilor inițiale, legea lui Faraday devine:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\mathbf{B}_d \quad (2.16)$$

Domeniul conductor Ω poate să facă goluri în Ω_0 (Fig. 2.1). Fie n_c numărul acestor goluri. Numărul de goluri în Ω_0 (N_h) poate să fie mai mare decât în Ω_t (n_s): $N_h = n_c + n_s$. Fie $T_k, k = 1, 2 \dots N_h$ numărul de tăieturi care transformă Ω_0 într-un domeniu simplu-conex $\Omega_0 = \Omega_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{N_h} T_k$. Frontiera lui Ω'_0 este $\partial\Omega'_0 = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega \cup_{k=1}^{n_c} (T'_k \cup T''_k)$, unde T'_k și T''_k sunt cele două fețe ale tăieturii T_k (Fig. (2.2)). Dacă este necesar, notăm prin T_{sk} tăietura bobinei supraconductoare. În Ω'_0 avem:

$$\mathbf{H}_d = -\text{grad}V.$$

Pe suprafețele $S_i, V = ct. = V_i$. Pe tăieturile T_k, V are un salt i_{dk} iar $\mu \frac{\partial V}{\partial n}$ are un flux magnetic Φ_{dk} . Avem:

$$\oint_{\partial\Omega'_0} -V\mathbf{B}_d \mathbf{n}_0 dA = \int_{\Omega_0} \nu B_d^2 dv \quad (2.17)$$

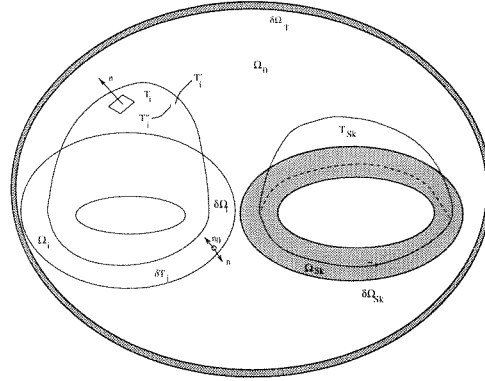


Fig. 2.2: Domeniul de calcul cu subdomenii conductoare multiplu conexe și bobine supraconductoare; sunt reprezentate și tăieturile practicate

și de asemenea:

$$\oint_{\partial\Omega'_0} -V\mathbf{B}_d\mathbf{n}_0dA = \int_{S''} -V\mathbf{B}_d\mathbf{n}_0dA - \sum_{k=1}^n \int_{S_i} V\mathbf{B}_d\mathbf{n}_0dA + \sum_{k=1}^{n_s} \left(- \int_{\partial\Omega_{sk}\setminus T_{sk}} V\mathbf{B}_d\mathbf{n}_0dA + i_k \int_{T_k} \mathbf{B}_d\mathbf{n}dA \right) + \sum_{i=1}^{n_c} \left(\int_{\partial\Omega_i\setminus T_i} V\mathbf{B}_d\mathbf{n}dA + (V'_i - V''_i) \int_{T_i} \mathbf{B}_d\mathbf{n}dA \right)$$

Cel de-al treilea termen e nul datorită condițiilor pe frontieră (β) și (δ).

Data fiind conservarea componentei tangențiale a lui \mathbf{H} la suprafețele corpurilor conductoare, potențialul magnetic scalar este continuu la trecerea prin aceste suprafețe. De asemenea, componenta normală a lui \mathbf{B} se conservă. Ca urmare prima integrală din ultimul termen poate trece pe fața dinspre conductor a suprafeței $\partial\Omega_i$. A doua integrală din ultimul termen este chiar fluxul magnetic de pe suprafața tăieturii T_i . Luând în considerare forma integrală a legii inducției electromagnetice și ținând cont de relația 2.16, ultimul termen devine:

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Omega_i\setminus T_i} V\mathbf{rot}\mathbf{E}ndA - (V'_i - V''_i) \oint_{\partial T_i} \mathbf{E}dr = \\ & - \int_{\partial\Omega_i\setminus T_i} \mathbf{rot}(V\mathbf{E})ndA + \int_{\partial\Omega_i\setminus T_i} (\mathbf{grad}V \times \mathbf{E})ndA - (V'_i - V''_i) \oint_{\partial T_i} \mathbf{E}dr = \\ & - \int_{C_i} V\mathbf{E}dr - \int_{\partial\Omega_i} (\mathbf{H}_d \times \mathbf{E})ndA - (V'_i - V''_i) \oint_{\partial T_i} \mathbf{E}dr \end{aligned}$$

unde C_i este frontiera suprafeței $\partial\Omega_i\setminus T_i$ (Figura 2.3). Deoarece

$$- \oint_{C_i} V\mathbf{E}dr = (V'_i - V''_i) \oint_{\partial T_i} \mathbf{E}dr \quad (2.18)$$

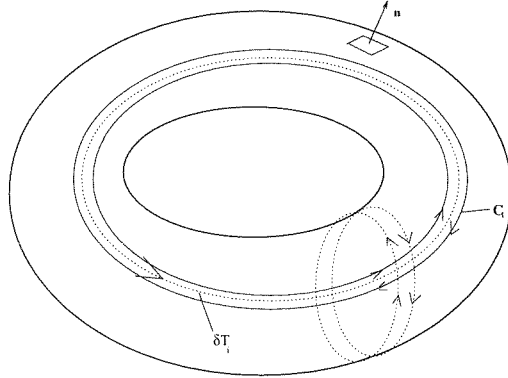


Fig. 2.3: Suprafața $\partial\Omega_i \setminus T_i$ și frontiera sa C_i

doar termenul $\int_{\partial\Omega_i} (\mathbf{H}_d \times \mathbf{E}) \mathbf{n} dA$ se păstrează. De aceea:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega'_0} -V \mathbf{B}_d \mathbf{n}_0 dA &= - \int_{\partial\Omega_i} (\mathbf{H}_d \times \mathbf{E}) \mathbf{n} dA = \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{J}_d \mathbf{E} dv - \int_{\Omega} \mathbf{H}_d \mathbf{B}_d dv = - \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma \mathbf{E}^2 dv \right) - \int_{\Omega} \nu \mathbf{B}_d^2 dv \end{aligned}$$

Utilizând relația (2.17), obținem:

$$\int_0^t \int_{\Omega_t} \nu \mathbf{B}_d^2 dv dt + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 dv = 0 \quad (2.19)$$

De aceea $\mathbf{B}_d = 0$, $\mathbf{E} = 0$. QED.

În mod explicit nu apare viteza în raționamentele de mai sus. Este necesar ca vitezele să fie impuse, pentru că mărimile de câmp sunt definite în sisteme de referință locale asociate particulelor în mișcarea lor. Pentru ca și câmpul diferență să se refere la puncte bine definite, este necesar ca cele două câmpuri care se scad să fie asociate la aceleași viteze de deplasare ale corpurilor.

Capitolul 3

Metode numerice de calcul pentru regimul cvasistationar

3.1 Metode diferențiale

Fie Ω_c domeniul conductor înconjurat de un domeniu neconductor Ω_0 și domeniul total $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_0$. Interfața între domeniile Ω_c și Ω_0 o notăm cu Γ_{c0} (vezi figura 3.1).

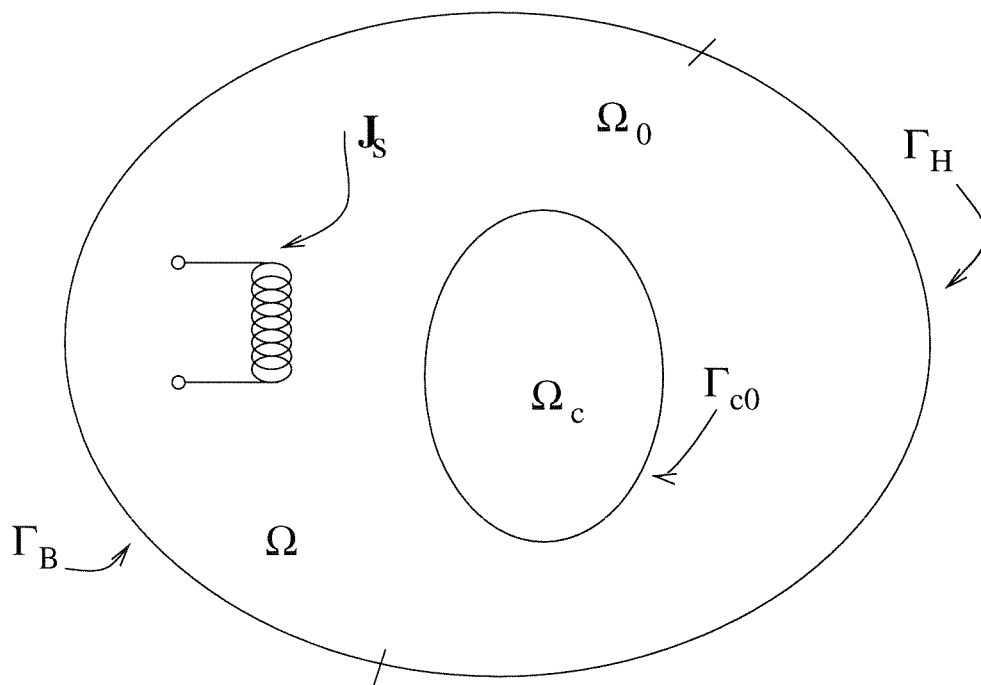


Fig. 3.1: Domeniu conductor simplu conex

Ecuțiile în domeniul conductor Ω_c :

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.5)$$

În domeniul neconductor Ω_0 :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (3.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.8)$$

Pe frontiera $\Gamma_c = \partial\Omega_0$ a domeniului conductor Ω_0 avem:

$$\mathbf{J}_n = 0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H}_t|_{\Omega_c} = \mathbf{H}_t|_{\Omega_0} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B}_n|_{\Omega_c} = \mathbf{B}_n|_{\Omega_0} \quad (3.11)$$

3.1.1 Formularea în $\mathbf{A} - V, \mathbf{A}$

Presupunem că în domeniul conductor Ω_c putem avea orice permeabilitate magnetică μ iar în domeniul neconductor Ω_0 avem permeabilitatea egală cu cea a vidului, μ_0 (aer). Domeniul total Ω îl considerăm simplu conex. În domeniul conductor Ω_c se folosește potențialul magnetic vector \mathbf{A} și potențialul electric scalar V iar în domeniul neconductor Ω_0 se folosește potențialul magnetic vector \mathbf{A} .

Într-adevăr, din legea fluxului magnetic avem:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (3.12)$$

și atunci din legea inducției (3.4) și teorema lui Ampere (3.1) pentru domeniul Ω_c se obține:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \quad (3.13)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (3.14)$$

Folosind legea conductivității (3.5):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \right) \quad (3.15)$$

Pentru domeniul neconductor Ω_0 se obține:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (3.16)$$

unde \mathbf{J}_s este densitatea de curent datorată surselor plasate în aer. Condițiile de frontieră sunt:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{A} = 0 \quad pe \Gamma_B \quad (3.17)$$

$$\nu \cdot \text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \quad pe \Gamma_H \quad (3.18)$$

iar condițiile de interfață:

$$\mathbf{n}_c \cdot \text{rot} \mathbf{A}_c + \mathbf{n}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{A}_0 = 0 \quad pe \Gamma_{c0} \quad (3.19)$$

$$\nu_c \cdot \text{rot} \mathbf{A}_c \times \mathbf{n}_c + \nu_0 \cdot \text{rot} \mathbf{A}_0 \times \mathbf{n}_0 = 0 \quad pe \Gamma_{c0} \quad (3.20)$$

Pentru a asigura unicitatea soluției (\mathbf{A}, V) se impune o condiție suplimentară, numită condiție de etalonare pentru \mathbf{A} , o condiție des utilizată fiind condiția de etalonare Coulomb:

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad in \Omega \quad (3.21)$$

În plus, pe frontiera domeniului total se dau:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \quad pe \Gamma_H \quad (3.22)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad pe \Gamma_B \quad (3.23)$$

Pentru rezolvarea numerică a problemei se folosește tehnica Galerkin, proiectându-se relațiile (3.15) și (3.16) pe o mulțime de funcții \mathbf{N}_k , ϕ_k , V_k . Funcțiile $\text{rot} \mathbf{N}_k$ sunt liniar independente. Funcțiile \mathbf{N}_k și ϕ_k sunt definite pe Ω_c iar V_k pe Ω .

Putem scrie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_0(t) + \sum_{k=1}^{n_N} \alpha_k(t) \mathbf{N}_k + \sum_{k=1}^{n_N} \gamma_k(t) \text{grad} \phi_k \quad (3.24)$$

$$V = \sum_{k=1}^{n_V} \beta_k(t) V_k \quad (3.25)$$

Proiectând relațiile (3.15) și (3.16), condițiile de frontieră și condiția de trecere pe \mathbf{N}_k obținem:

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot} \mathbf{N}_k \text{rot} \mathbf{A} dv + \int_{\Omega_c} \mathbf{N}_k \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) dv - \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_k \mathbf{J}_0 dv = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_N \quad (3.26)$$

Proiectând ecuațiile corespunzătoare pe funcțiile V_k obținem:

$$\int_{\Omega_c} \sigma \text{grad} V_k \left(\text{grad} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_V \quad (3.27)$$

Relația (3.21) se proiectează pe ϕ_k , obținându-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} \text{grad} \phi_k dv = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_{\phi} \quad (3.28)$$

Formularea este prezentată în [17], [86], [48]; se poate generaliza utilizarea ei și pentru cazul în care domeniul conductor Ω_c este multiplu conex, domeniul total Ω rămânând simplu conex. Utilizarea potențialului \mathbf{A} în Ω nu este totuși economică în raport cu alte formulări.

3.1.2 Formularea în $\mathbf{A} - V, \Phi$

Presupunem în continuare domeniul Ω_c tot simplu conex. Dacă rezolvăm problema de regim staționar în acest domeniu, se poate obține câmpul magnetic $(\mathbf{B}_0, \mathbf{H}_0)$. Utilizând un potențial magnetic scalar în acest domeniu se reduce foarte mult efortul de calcul. De exemplu, folosind elemente nodale, în loc de 3 necunoscute nodale apare una singură.

În domeniul conductor Ω_c se păstrează ecuațiile (3.15) și (3.16) iar în domeniul Ω_0 avem:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad}\Phi \quad (3.29)$$

unde:

$$\text{rot}\mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s \quad (3.30)$$

\mathbf{H}_s se calculează utilizând formula Biot-Savart-Laplace. Φ se numește potențial magnetic scalar redus.

Se obțin ecuațiile:

$$\text{rot}\nu\text{rot}\mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}V \right) = 0 \quad \text{in}\Omega_c \quad (3.31)$$

$$\text{div}\mu\text{grad}\phi = 0 \quad \text{in}\Omega_0 \quad (3.32)$$

cu condițiile pe frontiera domeniului conductor Γ_{c0} :

$$\sigma \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}V \right) \mathbf{n} = 0 \quad (3.33)$$

$$-\mu \frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{n}\text{rot}\mathbf{A} \quad (3.34)$$

$$(\mathbf{H}_0 + (-\text{grad}\phi)) \times \mathbf{n} = \nu\text{rot}\mathbf{A} \times \mathbf{n} \quad (3.35)$$

Potențialul \mathbf{A} se scrie, folosind funcțiile de formă \mathbf{N}_k :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n_N} \alpha_k(t) \mathbf{N}_k \quad (3.36)$$

iar pentru ϕ se folosesc funcțiile test ϕ_k definite pe Ω_0 :

$$\phi = \sum_{k=1}^{n_N} \gamma_k(t) \phi_k \quad (3.37)$$

Proiectând ecuațiile (3.31) și (3.32) pe funcțiile test respective \mathbf{N}_k și ϕ_k obținem:

$$\int_{\Omega_c} \sigma \text{grad}V_k \left(\text{grad}V + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) dv = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_V \quad (3.38)$$

Relația (3.21) se proiectează pe ϕ_k , obținându-se:

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot} \mathbf{N}_k \text{rot} \mathbf{A} dv + \int_{\Omega_c} \mathbf{N}_k \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) dv + \quad (3.39)$$

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot} \mathbf{N}_k \text{rot} \mathbf{A} dv + \int_{\Gamma_{c0}} \mathbf{N}_k ((\mathbf{H}_0 - \text{grad} \phi) \times \mathbf{n}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_N$$

și:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{A} \text{grad} \phi_k \text{grad} \phi dv + \oint_{\partial \Omega} \phi_k \mathbf{n} \text{rot} \mathbf{A} dA = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_\phi \quad (3.40)$$

Procedura $(\mathbf{A} - V, \phi)$ este mai economică din punctul de vedere al necesarului de memorie în comparație cu procedura $(\mathbf{A} - V, \mathbf{A})$ pentru că în domeniul neconductor necunoscutele sunt scalare. Pentru domenii multiplu conexe apar dificultăți greu de rezolvat pentru că nu mai putem defini potențialul ϕ . Această formulare este prezentată în lucrarea lui O. Biro și K. Preis [86] și de Hăntilă [48]. O variantă a acestei formulări este prezentată de Molfino, Fernandes ș.a. în [34] și de Alloto, Molfino, Fernandes în [15]. În loc de condițiile de frontieră pe frontiera domeniului conductor de tipul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ (pe Γ_{c0}) se folosesc condiții de tipul $V = 0$.

3.1.3 Formularea în $(\mathbf{A} - V, \mathbf{A} - \phi)$

Dacă regiunile conductoare sunt multiplu conexe, nu se poate utiliza potențialul magnetic scalar în regiunile neconductive. Se poate utiliza potențialul magnetic vector în golurile neconductive. În domeniul total Ω (vezi Figura 3.2 putem face câteva tăieturi Γ_{012} astfel încât să generăm subdomeniile Ω_{01} care împreună cu domeniile conductoare să formeze un domeniu simplu conex, în care putem utiliza formularea $(\mathbf{A} - V, \mathbf{A})$; în subdomeniile Ω_{02} se folosește potențialul magnetic vector scalar redus ϕ sau total ψ .

În Ω_c avem ecuațiile:

$$\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} - \text{grad} V \text{div} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) = 0 \quad (3.41)$$

$$\text{div} \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} V \right) = 0 \quad (3.42)$$

În Ω_{01} :

$$\text{div} \mu \text{grad} \psi = 0 \quad (3.43)$$

iar în Ω_{02} avem:

$$\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} - \text{grad} \nu \text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3.44)$$

Pe interfețele între domenii avem condițiile:

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_{01} \quad (3.45)$$

$$\nu_c \text{rot} \mathbf{A}_c \times \mathbf{n}_c + \nu_{01} \text{rot} \mathbf{A}_{01} \times \mathbf{n}_{01} = 0 \quad pe \Gamma_{c01}$$

$$\nu_c \text{div} \mathbf{A}_c - \nu_{01} \text{div} \mathbf{A}_{01} = 0$$

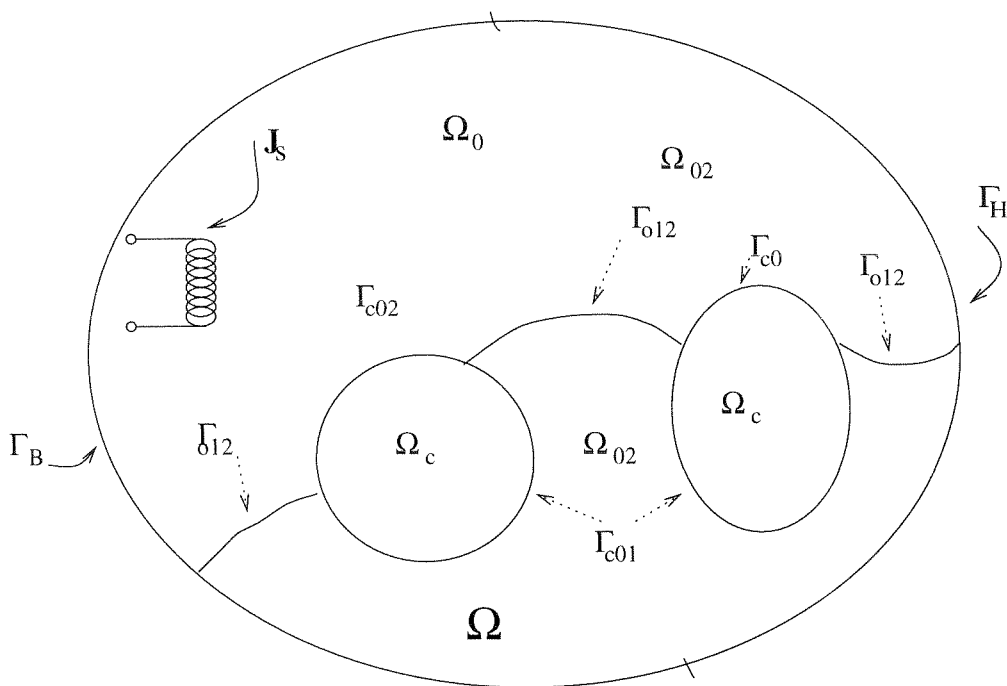


Fig. 3.2: Domeniu conductor multiplu (în acest exemplu, dublu) conex

$$\mathbf{n} \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} V \right) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_{c01} \text{ si pe } \Gamma_{c02} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \nu_{c01} \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{n}_{02} \mu \text{grad} \psi &= 0 \\ \nu_c \text{rot} \mathbf{A}_c \times \mathbf{n}_{c01} - \text{grad} \psi \times \mathbf{n}_{02} &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_{c01} \text{ si pe } \Gamma_{12} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Proiectând ecuațiile (3.41)...(3.44) pe funcțiile test \mathbf{N}_k , V_k , Ψ_k și integrând pe domeniile pe care sunt definite potențialele respective, obținem ecuațiile:

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{N}_k \left(\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} - \text{grad} \nu \text{div} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) \right) dv = 0 \quad (3.48)$$

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{N}_k \left(\text{div} \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} V \right) \right) dv = 0 \quad (3.49)$$

$$\int_{\Omega_{01}} \mathbf{N}_k (\text{rot} \nu \text{rot} \mathbf{A} - \text{grad} \nu \text{div} \mathbf{A}) dv = 0 \quad (3.50)$$

$$\int_{\Omega_{02}} \mathbf{N}_k (\text{div} \mu \text{grad} \psi) dv = 0 \quad (3.51)$$

Formularea este prezentată de O. Biro și K. Preis în [86] și de Hăntîlă în [48].

3.1.4 Formularea în $\mathbf{T} - \Omega$

Considerăm domeniul descris în Figura 3.1. În regiunea conductoare putem folosi potențialele electric vector și magnetic scalar Ω ($\mathbf{T} - \Omega$). În regiunea neconductoare se utilizează potențialul magnetic scalar Ω .

Cum $div\mathbf{J} = 0$, putem utiliza potențialul electric vector astfel încât:

$$\mathbf{J} = rot\mathbf{T} \quad (3.52)$$

În regim cvasistationar avem și $rot\mathbf{H} = \mathbf{J}$ deci \mathbf{T} diferă de \mathbf{J} printr-un gradient:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - grad\Omega \quad (3.53)$$

Se obțin apoi din legea inducției electromagnetice și din relația (3.52):

$$rotprot\mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t}(\mu(\mathbf{T} - grad\Omega)) = 0, \quad (3.54)$$

iar din relația (3.53):

$$div(\mu(\mathbf{T} - grad\Omega)) = 0 \quad (3.55)$$

Pentru regiunile neconductoare, câmpul poate fi descris numai de gradientul potențialului Ω (vezi [86]):

$$\mathbf{H} = -grad\Omega \quad (3.56)$$

Condiția pe interfața Γ_{c0} este $J_n = 0$. metoda este prezentată în [86] de W. Renhart și K. Preis. În [57], [76] sunt prezentate variante cu modificări ale acestei metode. În [57], regiunea neconductoare poate conține curenți de excitație. Pentru a reduce necunoscutele în regiunea neconductoare Ω_0 , distribuția de curent de excitație se transformă într-o regiune magnetizată echivalentă astfel încât avem nevoie doar de un potențial magnetic scalar pentru a descrie câmpul aici. În [76] se definește \mathbf{T}_0 potențialul electric vector provenit din sursele plasate în regiunea neconductoare. Avem deci:

$$\mathbf{J}_0 = rot\mathbf{T}_0$$

și

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_c$$

unde \mathbf{T}_0 este produs de curenți turbionari. pentru forme complicate ale bobinelor sursă, se poate deduce \mathbf{J}_0 introducând un potențial scalar electric ($divgrad\phi = 0$), urmând să deducem apoi pe \mathbf{J}_0 din ϕ . Se oferă și soluția de a trata domeniile conductoare multiplu-conexe ca având conductivitatea foarte mică în regiunile golurilor dar în practică această metodă este instabilă numeric. O soluție pentru tratarea acestor cazuri schițate doar în lucrarea [76] e descrisă în capitolele următoare, privind formulările în $(\mathbf{T} - \Psi, \Phi)$ și $(\mathbf{T} - \Psi, \Phi, \mathbf{A})$.

3.1.5 Formularea în $\mathbf{T} - \Psi, \Phi$

În domeniul conductor (vezi Figura 3.1) avem aceleași ecuații ca în capitolul precedent.

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} (\mu (\mathbf{T} - \text{grad} \Psi)) = 0 \quad (3.57)$$

iar din relația (3.53):

$$\text{div} (\mu (\mathbf{T} - \text{grad} \Psi)) = 0 \quad (3.58)$$

Pentru regiunea neconductoare Ω_0 , \mathbf{T} poate să fie chiar \mathbf{H}_0 unde

$$\mathbf{H}_0 = -\text{grad} \Phi$$

cu condiția ca pe frontiera fiecărui domeniu conductor să avem:

$$\mathbf{H}_{0t} = 0 \quad (3.59)$$

În Ω_0 avem:

$$\text{div} \mu \text{grad} \Phi = 0 \quad (3.60)$$

Ecuațiile (3.57) și (3.58) se pot înlocui cu ecuația:

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{T} - \text{grad} \rho \text{div} \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} (\mu (\mathbf{T} - \text{grad} \Psi)) = 0 \quad (3.61)$$

Pe frontiera Γ_{c0} avem $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ și se poate impune condiția pentru \mathbf{T} :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{T} = 0 \quad (3.62)$$

Dacă domeniul conductor este simplu conex, continuitatea componente tangențiale a lui \mathbf{H} pe γ_{c0} conduce la continuitatea potențialului scalar prin γ_{c0} . Obținem atunci $\Phi = \Psi$.

Pentru calculele numerice se definesc în Ω_0 funcțiile \mathbf{N}_k care respectă condiția de frontieră (3.62) și în Ω se definesc funcțiile ϕ_k :

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^{n_N} \alpha_k(t) \mathbf{N}_k \quad (3.63)$$

și:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n_\phi} \gamma_k(t) \phi_k \quad (3.64)$$

Proiectăm (3.61) pe \mathbf{N}_k și (3.62) pe ϕ_k și obținem:

$$\int_{\Omega_c} \left(\rho \text{rot} \mathbf{N}_k \text{rot} \mathbf{T} + \rho \text{div} \mathbf{N}_k \text{div} \mathbf{T} + \mu \mathbf{N}_k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \mu \mathbf{N}_k \text{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dv = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.65)$$

și:

$$\int_{\Omega} \mu \text{grad} \phi_k \text{grad} \phi dv - \int_{\Omega} \mu \text{grad} \phi_k \mathbf{T} dv + \oint_{\Gamma_{c0}} \phi_k B_{0n} dA = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_\phi \quad (3.66)$$

Ecuațiile (3.65) și (3.66) formează un sistem de ecuații pe care îl rezolvăm pentru a afla pe \mathbf{T} și pe ϕ . Metoda aceasta este prezentată în [48]. Pentru domenii multiplu conexe este preferabil să utilizăm formularea în $(\mathbf{T} - \Psi, \phi, \mathbf{A})$.

3.1.6 Formularea în $(\mathbf{T} - \Psi, \Phi, \mathbf{A})$

Se completează formularea în $(\mathbf{T} - \Psi, \Phi)$ cu \mathbf{A} pentru golurile în regiunile conductoare, atunci când avem domenii conductoare multiplu conexe. Metoda este prezentată în [18] de Biro și Preis. Pe lângă ecuațiile (3.57-3.62) avem și:

$$\rho \operatorname{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n}_A = 0 \quad (3.67)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_T = 0 \quad (3.68)$$

$$-\mu \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{n}_T + \mathbf{n}_A \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 \quad (3.69)$$

$$\nu \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} + \mathbf{T} \times \mathbf{n}_T - \operatorname{grad} \Psi \times \mathbf{n}_T = 0 = 0 \quad (3.70)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3.71)$$

Aplicând procedura Galerkin, funcțiile de formă fiind definite ca:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{n_N} \alpha_k(t) \mathbf{N}_k \quad (3.72)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n_N} \alpha_k(t) \mathbf{N}_k \quad (3.73)$$

și:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{n_\Psi} \gamma_k(t) \psi_k \quad (3.74)$$

se obțin ecuațiile:

$$\int_{\Omega_c} \left(\rho \operatorname{rot} \mathbf{N}_k \operatorname{rot} \mathbf{T} + \rho \operatorname{div} \mathbf{N}_k \operatorname{div} \mathbf{T} + \mu \mathbf{N}_k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \mu \mathbf{N}_k \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dv - \quad (3.75)$$

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{N}_k \rho \operatorname{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n}_T - \int_{\partial \Omega} \mathbf{N}_k \mathbf{n}_T \rho \operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_N$$

$$\int_{\Omega} \left(-\mu \operatorname{grad} \Psi_k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mu \operatorname{grad} \psi_k \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dv - \quad (3.76)$$

$$\int_{\partial \Omega} \Psi_k \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_T dA + \oint_{\Gamma_{co}} \mu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_T dA = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_\Psi$$

$$\int_{\Omega_c} \nu \left(-\operatorname{rot} \mathbf{N}_k \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \mathbf{N}_k \operatorname{grad} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{N}_k \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv - \quad (3.77)$$

$$\int_{\partial \Omega} \mathbf{N}_k \nu \operatorname{rot} \mathbf{c} \times \mathbf{n}_A dA + \int_{\partial \Omega} \mathbf{N}_k \mathbf{n}_A \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dA = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n_A$$

Rezolvarea ecuațiilor (3.75 - 3.77) permite determinarea mărimilor \mathbf{T} , \mathbf{A} , Ψ .

3.1.7 Formularea în $(\mathbf{A} - \Psi - \Phi)$

Se consideră trei regiuni distincte, fie Ω_A , Ω_Ψ și Ω_{Phi} după variabila folosită în fiecare din regiuni. În Ω_A conductivitatea se consideră constantă, dependența $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este neliniară și nu avem curenți sursă (domenii feromagnetice). În Ω_Ψ conductivitatea este nulă, permeabilitatea este μ_0 și avem curenți sursă (aer în care sunt plasate și sursele). În domeniul Ω_Φ nu avem curenți sursă, conductivitatea mediului este zero dar dependența $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este neliniară (magnet permanent). Formularea este prezentată de Williamson și Chan [95], fiind utilizată pentru o aplicație în care se include calculul curenților turbionari în medii neliniare în mișcare.

În domeniul Ω_A (conductor, magnetic neliniar, fără curenți sursă) avem:

$$rot \nu rot \mathbf{A} = \sigma \left(\mathbf{v} \times rot \mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad V \right) = 0 \quad (3.78)$$

Se poate înlătura gradientul potențialului scalar V dacă efectul de mișcare este foarte mic. Putem scrie atunci, cu $grad V = grad(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$, substituind în ecuația (3.78):

$$rot \nu rot \mathbf{A} + \sigma \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad V \right) = 0 \quad (3.79)$$

În domeniul Ω_ϕ (neconductor, nemagnetic, cu surse de curent), putem folosi potențialul scalar magnetic ϕ . Acesta se definește:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - grad \phi \quad (3.80)$$

cu \mathbf{H}_s ce se poate calcula cu ajutorul formulei Biot-Savart-Laplace, din densitatea de curent în sursele constituite de bobine parcurse de curent variabil în timp.

Pentru domeniul Ω_Ψ (neconductor, neliniar magnetic, fără surse de curent - magnet permanent), avem:

$$\mathbf{H} = -grad \Psi \quad (3.81)$$

$$div \mu grad \Psi = 0 \quad (3.82)$$

Utilizând procedura Galerkin clasică, unde am notat cu \mathbf{N}_k funcțiile de formă obținem ecuațiile:

$$\int_{\Omega_A} \left(\nu rot \mathbf{N}_k rot \mathbf{A} + \sigma \mathbf{N}_k \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) dv = \oint_{\partial \Omega_A} \nu \mathbf{N}_k (rot \mathbf{A} \times \mathbf{n}_A) dA \quad (3.83)$$

$$\int_{\Omega_\phi} grad \mathbf{n}_k grad \phi dv = \oint_{\partial \Omega_\phi} \mathbf{N}_k grad \phi \mathbf{n}_\phi dA \quad (3.84)$$

$$\int_{\Omega_\Psi} \mu grad \mathbf{n}_k grad \psi dv = \oint_{\partial \Omega_\Psi} \mathbf{N}_k grad \psi \mathbf{n}_\phi dA \quad (3.85)$$

Pentru două elemente care au în comun o față $\Gamma_{\phi\psi}$, pe interfața $\phi - \psi$ componenteii normale a lui \mathbf{B} se poate impune înlocuind termenul de suprafață în ecuația (3.85) cu:

$$\oint_{\Gamma_{\phi\psi}} \mu \mathbf{N}_k \text{grad} \psi \mathbf{n}_\psi dA - \oint_{\Gamma_{\phi\psi}} \mu_0 \mathbf{N}_k (\mathbf{H}_s - \text{grad} \phi) \mathbf{n}_\phi dA \quad (3.86)$$

iar continuitatea componenteii tangențiale a lui \mathbf{H} se poate impune în mod explicit prin:

$$\Phi = \Psi + \int (\mathbf{H}_s \times \mathbf{n}_\psi) d\mathbf{l} \quad (3.87)$$

La interfața $\phi - \mathbf{A}$, pentru componenta tangențială a lui \mathbf{H} :

$$\int_{\Gamma_{\psi\mathbf{A}}} \mu \mathbf{N}_k (\text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}_{\mathbf{A}}) dA = - \int_{\Gamma_{\psi\mathbf{A}}} \mathbf{N}_k (\text{grad} \psi \times \mathbf{n}_{\mathbf{A}}) dA \quad (3.88)$$

$$\int_{\Gamma_{\psi\mathbf{A}}} \text{grad} \psi \mathbf{n}_\psi dA = - \int_{\Gamma_{\psi\mathbf{A}}} \mathbf{N}_k \text{rot} \mathbf{A} \mathbf{n}_\psi dA \quad (3.89)$$

Pe interfața $\phi - \mathbf{A}$, continuitatea componenteii tangențiale a lui \mathbf{H} și a celei normale a lui \mathbf{B} se poate impune prin:

$$\int_{\Gamma_{\phi\mathbf{A}}} \mu \mathbf{N}_k (\text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}_{\mathbf{A}}) dA = \int_{\Gamma_{\phi\mathbf{A}}} \mathbf{N}_k (\mathbf{H}_s - \text{grad} \phi) \times \mathbf{n}_{\mathbf{A}} dA \quad (3.90)$$

$$\int_{\Gamma_{\phi\mathbf{A}}} \mathbf{N}_k \text{grad} \phi \mathbf{n}_\phi dA = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Gamma_{\phi\mathbf{A}}} \mathbf{N}_k (\mu_0 \mathbf{H}_s - \text{rot} \mathbf{A}) \mathbf{n}_\phi dA \quad (3.91)$$

3.1.8 Formularea în $\mathbf{A}^* - \phi$

Formularea este prezentată de Hăntilă [48], de Emson și Trowbridge [35] și de Song și Ida [90]. Folosind aceleași notații din Figura 3.1 unde domeniul conductor este notat cu Ω_c iar aerul din jur, în care puteau fi plasate și bobinele-sursă, era notat cu Ω_0 .

Se notează:

$$\mathbf{A}^* = \int_0^t E(\tau) d\tau - \mathbf{A}_0 \quad (3.92)$$

unde:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A}_0 &= \mathbf{B}|_{t=0}, \\ \text{div} \sigma \mathbf{A}_0 &= 0 \end{aligned}$$

și:

$$\sigma \mathbf{A}_0 \mathbf{n} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial \Omega_c.$$

Legea inducției electromagnetice devine:

$$\text{rot} \mathbf{A}^* = -\mathbf{B} \quad (3.93)$$

și, înlocuind în teorema lui Ampere, obținem:

$$\text{rot}\nu\text{rot}\mathbf{A}^* + \sigma\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t} = 0 \quad (3.94)$$

iar pe frontiera $\partial\Omega_c$ avem:

$$\sigma\mathbf{A}^*\mathbf{n} = 0 \quad (3.95)$$

În Ω_0 \mathbf{A} nu este bine definit și se folosește potențialul magnetic redus ϕ , dacă Ω_0 este simplu conex. Condițiile de trecere pe frontiera domeniului conductor sunt:

$$\mathbf{n}\text{rot}\mathbf{A}^* = -\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{n} \times \nu\text{rot}\mathbf{A}^* = \mathbf{n} \times (-\text{grad}\phi + \mathbf{H}_0) \quad (3.97)$$

Cu \mathbf{N}_k , V_k și ϕ_k funcții liniar independente definite pe Ω și Ω_0 și $\text{rot}\mathbf{N}_k$ liniar independente, avem:

$$\mathbf{A}^* = \sum_{k=1}^{n_N} \alpha_k(t)\mathbf{N}_k + \sum_{k=1}^{n_N} \beta_k(t)(-\text{grad}V_k \quad \text{in} \quad \Omega \quad (3.98)$$

și

$$\phi = \sum_{k=1}^{n_N} \gamma_k(t)\phi_k \quad \text{in} \quad \Omega_0 \quad (3.99)$$

Proiectăm ecuația (3.94) și condiția de trecere (3.97) pe \mathbf{N}_k și obținem:

$$\int_{\Omega} \nu\text{rot}\mathbf{N}_k\text{rot}\mathbf{A}^* dv + \int_{\Omega_c} \mathbf{N}_k\sigma\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t} dv + \oint_{\partial\Omega_c} (\mathbf{N}_k \times (\mathbf{H}_0 - \text{grad}\phi)) \mathbf{n} dA = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_N \quad (3.100)$$

Proiectând pe V_k ($\sigma\mathbf{A}^*\mathbf{n} = 0$) și condiția de etalonare ($\text{div}(\sigma\mathbf{A}^*) = 0$) se obține:

$$\int_{\Omega_c} \sigma\text{grad}v_k\mathbf{A}^* dv = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_V \quad (3.101)$$

Ecuația ($\text{div}\mu\text{grad}\phi = 0$) și condiția de trecere (3.96) se proiectează pe funcțiile ϕ_k și se obține:

$$\int_{\Omega_0} \mu\text{grad}\phi_k\text{grad}\phi dv + \oint_{\partial\Omega} \phi_k\mathbf{n}\text{rot}\mathbf{A}^* dA = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_\phi \quad (3.102)$$

Putem folosi elemente de muchie asociate unui coarboare selectat din mulțimea muchiilor rețelei de discretizare; astfel se conservă doar componenta tangențială a lui \mathbf{E} . În cazul domeniilor multiplu conexe, utilizarea lui ϕ în Ω_0 introduce o dificultate notabilă, chiar dacă transformăm domeniul Ω_0 într-unul simplu conex, cu ajutorul tăieturilor.

3.2 Metode BEM – FEM

Presupunem un domeniu conductor Ω_c scufundat într-un mediu infinit extins Ω_0 cu permeabilitate μ_0 , de conductivitate nulă (aer), în care se pot găsi și bobine sursă. Notăm cu \mathbf{J}_0 densitatea de curent a bobinei sursă. Problema se poate trata cu metode diferențiale, definind frontierele domeniului exterior conductorului la o distanță finită. În acest caz soluția poate fi afectată de condițiile impuse pe o frontieră artificială. Putem folosi o combinație între o metodă diferențială, de element finit (FEM) în interiorul conductorului și o metodă integrală - metoda elementului de frontieră (BEM) - pentru spațiul exterior conductorului. Ecuatiile de elemente finite pentru domeniul conductor trebuie atunci îmbinate pe frontieră cu cele pentru calculul integralei de frontieră.

3.2.1 Formularea electrică

Formularea în \mathbf{E}

Folosim o formulare electrică în care câmpul electric \mathbf{E} se ia drept variabilă pentru cele două regiuni tratate cu elemente finite (regiunea conductoare și cu integrale de frontieră. Utilizarea chiar a mărimii de câmp ca variabilă elimină necesitatea utilizării unei condiții de etalonare.

Se consideră domeniul conductor Ω_c și complementul acestuia $R^3 - \Omega_c$ în care se găsesc și bobinele sursă. fie \mathbf{J}_0 densitatea de curent a bobinelor sursă. Mediul conductor poate sa fie și nelinier magnetic. Utilizând Galerkin, obținem:

$$\int_{R^3} \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E}' \text{rot} \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \sigma \mathbf{E}' + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \mathbf{E}' \text{rot} \mathbf{H}_0 dv = 0 \quad (3.103)$$

Câmpul \mathbf{E} se poate scrie ca $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_r$ unde \mathbf{E}_0 este câmpul sursă iar \mathbf{E}_r este câmpul datorat curenților turbionari. Atunci ecuația (3.103) se poate scrie:

$$\int_{R^3} \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E}' \text{rot} \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_c} \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}' dv + \frac{1}{\mu_0} \int_{\Gamma_c} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{E}_r dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial \Omega_c} \mathbf{E}' \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 dA \quad (3.104)$$

Se poate defini un operator de frontieră $\mathcal{S} \mathbf{E}_r = \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{E}_r$, partea integralei de frontieră în relația (3.104) putând fi scrisă:

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{E}_r dA = \langle \mathcal{S} \mathbf{E}_r; \mathbf{E}' \rangle \quad (3.105)$$

Formularea este prezentată de Ren, Bouillaut și Razek în [25]. Se folosesc elemente de muchie și o rețea tetraedrală în interiorul domeniului conductor. Urma rețelei tetraedrale pe frontieră este o rețea triunghiulară. Trebuie asigurată continuitatea componentei tangențiale a câmpului la suprafața conductorului. Se alege de aceea funcții de formă pentru operatorul de frontieră de același tip cu cele folosite pentru elementul finit în domeniul conductor.

Formularea în \mathbf{A}_r

O variantă a acestei formulări electrice, prezentată de Bouillaut, Ren, Razek în [25] folosește potențialul magnetic vector redus. Acesta poate fi evaluat, conform [25], prin introducerea unei pânze de curent superficial $K(r')$ Avem deci pe frontieră:

$$A_r(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_c} \frac{K(r')}{|r - r'|} dA(r') \quad (3.106)$$

Componenta tangențială a câmpului magnetic pe Γ_c se scrie:

$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \mathbf{n} \times \text{rot} A_r(r) = \frac{1}{2} K(r) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_c} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA \quad (3.107)$$

Utilizând funcții test vectoriale \mathbf{K}' și \mathbf{A}' cu care înmulțim termenii ecuației precedente și integrând peste toată frontiera Γ_c obținem:

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{K}'(\mathbf{r}) \mathbf{A}_r(\mathbf{r}) d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \frac{\mathbf{K}'(\mathbf{r}) \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA dA \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mathbf{A}'(r) \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n}_r \times \text{rot} \mathbf{A}_r(r) \right) dA &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \mathbf{K}'(\mathbf{r}) \mathbf{A}'(\mathbf{r}) d\mathbf{A} - \\ &\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \frac{(\mathbf{A}'(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}_r) \cdot ((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{K}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA dA \end{aligned} \quad (3.109)$$

Pentru asigurarea continuității componenteii normale a câmpului magnetic, funcția de interpolare a potențialului magnetic vector \mathbf{A}_r corespunde funcției de interpolare utilizată în metoda elementelor finite. Pentru pânza de curent \mathbf{K} , funcțiile de interpolare asigură automat $\text{div} \mathbf{K} = \mathbf{0}$. Eliminând pe \mathbf{K} din ecuațiile discretizate, obținem:

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{A}'(r) \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n}_r \times \text{rot} \mathbf{A}_r(r) \right) dA = \langle \mathcal{R} \mathbf{A}_r; \mathbf{A}' \rangle \quad (3.110)$$

unde \mathcal{R} este matricea de rigiditate exterioară. Această formulare a stat la baza implementării codului Trifou-E.

3.2.2 Formularea magnetică

Formularea în \mathbf{H}

Aceasta este formularea care a stat la baza codului Trifou-H, elaborat de Bossavit și Verité. Este prezentată în [23]; în domeniul conductor se folosește ca necunoscută chiar intensitatea câmpului magnetic \mathbf{H} iar în domeniul neconductor exterior potențialul magnetic scalar. Se folosesc elemente de muchie și o matrice de rigiditate pe frontieră.

Formulara în potențial magnetic scalar redus ω_r

Această formulare e prezentată de Bouillault, Ren și Razek în [25]; în mediul neconductor se folosește potențialul magnetic scalar. Variante sunt prezentate în [78] de Onuki și Wakao. Potențialul magnetic scalar redus verifică în domeniul exterior corpului conductor ecuația lui Laplace și deci poate fi calculat într-un punct r pornind de la o distribuție superficială de sarcini fictive $q(r')$ pe suprafața γ_c a domeniului Ω_c .

$$\omega_r(r) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{\Gamma_c} \frac{q(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA(r') \quad (3.111)$$

Derivata normală a lui ω într-un punct de pe suprafața Γ_c se poate scrie:

$$\mu_0 \text{grad} \omega_r(r) \cdot \mathbf{n}_r = \frac{1}{2} q(r) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_c} q(r') \frac{\mathbf{n}_r \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA \quad (3.112)$$

Se obține, într-o formulare variațională:

$$\int_{\Gamma_c} q'(r) \omega_r(r) dA = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \frac{q'(r) q(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA dA \quad (3.113)$$

și:

$$\int_{\Gamma_c} \omega'(r) (\mu_0 \text{grad} \omega_r \cdot \mathbf{n}_r) dA = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \omega'(r) q(r) dA - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_c} \int_{\Gamma_c} \omega'(r) q(r') \frac{\mathbf{n}_r \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA dA \quad (3.114)$$

Funcția de interpolare pentru potențialul magnetic scalar trebuie să fie aleasă astfel încât acesta să aibă continuitate cu câmpul tangențial calculat cu metoda elementelor finite. Eliminarea sarcinii q duce la:

$$\int_{\Gamma_c} \omega'(r) \mu_0 \text{grad} \omega_r \cdot \mathbf{n}_r dA = \langle \mathcal{R} \omega_r; \omega' \rangle \quad (3.115)$$

unde \mathcal{R} este matricea de rigiditate exterioară.

3.3 Metode hibride

Metodele hibride combină operatori diferențiali și integrali, la fel ca și metodele BEM-FEM descrise în capitolul anterior. În vreme ce cuplajul standard BEM-FEM include un operator integral suprafață-suprafață, metodele hibride presupun un operator de tip volum-suprafață. Presupunem că domeniul de calcul Ω este o reuniune finită de subdomenii mărginite și simplu conexe Ω_i și că frontiera Γ a domeniului Ω este netedă. Presupunem că în afara domeniului Ω nu există materiale conductoare sau magnetice. Densitatea totală de curent \mathbf{J} este suma dintre densitatea de curent impusă \mathbf{J}_s și densitatea curenților induși $\sigma \mathbf{E}$: $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \sigma \mathbf{E}$. Presupunem că nu există curent electric ce înțeapă frontiera Γ a domeniului Ω . Notăm câmpurile \mathbf{B} și \mathbf{H} generate de surse cu \mathbf{B}_s și \mathbf{H}_s . Prezentăm aici două formulări hibride complementare, formularea în \mathbf{H} și formularea în \mathbf{B} .

3.3.1 Formularea în \mathbf{H}

Printr-o formulare în \mathbf{H} se înțelege o procedură numerică impunând exact teorema lui Ampère. Legea fluxului electric și legea lui Faraday sunt impuse numai într-un sens slab. Așa cum se arată în [41] și [91], problema se formulează astfel: *Să se găsească h în $L^2(\Omega)$ astfel încât*

$$\int_{\Omega} \text{grad}\phi' \cdot \mu \mathbf{H} - \int_{\Gamma} \phi' (\chi \mathbf{H}, \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}_s) \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma} \phi'_s \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \phi' \in L^2_{\text{grad}}(\Omega) \quad (3.116)$$

și:

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{H}' \cdot \frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{H} + \int_{\Omega} \mathbf{H}' \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{H}' \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_s \quad \forall \phi' \in L^2_{\text{rot}}(\Omega) \quad (3.117)$$

În domeniul neconductoare, ecuația precedentă se înlocuiește cu legea lui Ampere:

$$\int_{\Omega} \mathbf{J}' \cdot \text{rot} \mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{J}' \cdot \mathbf{J}_s, \quad \forall \mathbf{J}' \in C^0 \quad (3.118)$$

unde $C^0 = \{v \mid \text{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ pe } \Gamma\}$. Presupunem pentru început că $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ se cunoaște pe frontiera domeniului Γ_c . Dacă se introduc restricțiile pentru operatorii div și grad definind $\text{dom}(\text{grad}_{\Gamma}) = \{\phi \text{ în } L^2_{\text{grad}}(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ pe } \Gamma\}$. Ecuațiile (3.116) și (3.117) se pot înlocui cu:

$$\int_{\Omega} \text{grad}\phi' \cdot \mu \mathbf{H}' = 0 \quad \forall \phi' \in \text{dom}(\text{grad}_{\Gamma}) \quad (3.119)$$

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{H}' \cdot \frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{H} + \int_{\Omega} \mathbf{H}' \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{H}' \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_s \quad \forall \phi' \in \text{dom}(\text{rot}_{\Gamma}) \quad (3.120)$$

Am presupus cunoașterea lui $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ pe Γ . Această premisă o putem înlocui introducând o condiție de frontieră Dirichlet implicită:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} - \mathbf{n} \times \mathbf{H}(\chi \mathbf{H}, \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}_s) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s. \quad (3.121)$$

Astfel problema formulată în \mathbf{H} revine la: *determin pe $\mathbf{H} \in L^2(\Omega)$ astfel încât (3.119)(3.120) și 3.121) să fie îndeplinite simultan.*

3.3.2 Formularea în \mathbf{B}

În această formulare, legea fluxului și legea lui Faraday sunt impuse exact în vreme ce teorema lui Ampere este impusă într-o formă slabă. Introducând potențialul magnetic vector al lui \mathbf{B} , legea fluxului magnetic este impusă exact. Dacă se folosește o restricție pentru operatorul rot și o condiție de frontieră Dirichlet implicită, problema se poate formula astfel: *Determinați $\{\alpha, \phi\}$ în $\mathbf{L}^2_{\text{rot}}(\Omega) \times \mathbf{L}^2_{\text{grad}}(\Omega)$ astfel încât:*

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{A}' \cdot \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} - \int_{\Omega} \cdot \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \phi \right) = \int_{\Omega} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{J}_s \quad \forall \mathbf{A}' \in \text{dom}(\text{rot}_{\Gamma}), \quad (3.122)$$

$$\int_{\Omega} \text{grad}\phi' \cdot \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}\phi \right) = 0 \quad \forall \phi' \in \text{dom}(\text{grad}_{\Gamma}) \quad (3.123)$$

și:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} - \mathbf{n} \times \mathbf{A} \left(\frac{\chi}{\mu} \text{rot}\mathbf{A}, -\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}\phi \right) \right) = \mathbf{n} \times \mathbf{A}_s. \quad (3.124)$$

3.4 Metoda integrală Albanese-Rubinacci

Se pornește de la legea inducției electromagnetice (Faraday) în forma:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}V \quad (3.125)$$

în care se înlocuiește \mathbf{E} din legea conducției și se exprimă potențialul magnetic vector \mathbf{A} , cu formula Biot-Savart, în funcție de densitatea de curent \mathbf{J} , despărțindu-se componenta câmpului datorată curenților turbionari și cea datorată curenților impuși din bobinele sursă. Se obține astfel ecuația integrală a densității de curent \mathbf{J} scrisă, în medii conductoare simplu conexe, sub forma:

$$\rho \mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} dv + \text{grad}V = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \frac{1}{r} dv \quad (3.126)$$

unde Ω_c este domeniul curenților turbionari iar Ω_0 este domeniul infinit extins exterior (aer) iar \mathbf{J}_0 este densitatea curenților din bobinele sursă. Se introduce potențialul electric vector ca:

$$\text{rot}\mathbf{T} = \mathbf{J} \quad \text{in} \quad \Omega_c \quad (3.127)$$

$$\text{rot}\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\Omega_c \quad (3.128)$$

și se folosesc elemente Whitney de ordinul 1 (elemente de muchie) și o procedură Galerkin în implementarea numerică:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{n_H} \alpha_i(t) \mathbf{N}_i \quad (3.129)$$

Domeniul conductor se discretizează folosind hexaedre. Muchiile active sunt doar cele asociate corzilor coarborelui interior format din muchiile rețelei de discretizare. Se pornește arborele de pe frontieră, în așa fel încât să se obțină și pe frontieră un arbore complet. Se obține un sistem de ecuații de forma:

$$\{R\}[\alpha] + \{L\} \frac{d[\alpha]}{dt} = [U] \quad (3.130)$$

unde:

$$R_{ik} = \int_{\Omega} \rho \text{rot}\mathbf{N}_i \text{rot}\mathbf{N}_k dv \quad (3.131)$$

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \text{rot}\mathbf{N}_i \text{rot}\mathbf{N}_k dv dv \quad (3.132)$$

$$U_k = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} \text{rot} \mathbf{N}_k dv \quad (3.133)$$

Formularea este prezentată de Albanese și Rubinacci în [11] și [12]. Pentru domenii multiplu conexe, condiția $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0$ asociată cu alegerea muchiilor active pornind de la un arbore desfășurat în domeniul conductor discretizat cu elemente de volum devine prea restrictivă când apar și curenți de circulație. Trebuie adăugat un număr de grade de libertate egal cu numărul de tăieturi necesare pentru a reduce domeniul $\mathcal{R}^3 - \Omega_c$ la un domeniu simplu conex. Aceste grade de libertate adiționale pot fi asociate unui set de integrale de linie (egale și corelate între ele) ale lui \mathbf{T} de-a lungul muchiilor care intersectează suprafețele de tăiere care ar fi necesare în metoda clasică. Se utilizează un arbore a cărui generare pornește cu muchiile de pe frontieră, astfel încât acestea să formeze la rândul lor un arbore complet. Dacă se notează cu E -numărul de muchii pe frontieră și cu $V-1$ -numărul de noduri de pe frontieră, numărul de elemente active de pe frontieră este de $E - V + 1$. Această formulare este prezentată în [2]. Tratarea problemelor conținând și domenii feromagnetice se poate face considerând întreg mediul problemei liniar magnetic și corectând iterativ valoarea magnetizației se păstrează avantajele metodei Albanese-Rubinacci. Albanese, Hăntilă, Rubinacci [7] [8] [9] [10] dezvoltă această metodă constatând o bună convergență a procedurii iterative de corecție a magnetizației. Rezultatele lor se bazează în principal pe rezultatele anterioare [11] [2] și pe articolele lui Hăntilă privind o metodă de rezolvare a câmpului magnetic staționar în medii neliniare magnetic (1974) [50] [46] și dezvoltărilor ulterioare, pentru regim cvasistaționar (1975) și folosind o metodă de suprarelaxare (1982) [49].

3.5 Comparație între metodele numerice prezentate

Diferitele formulări utilizate în probleme de regim cvasistaționar sunt comparate din punct de vedere al rapidității de calcul, al necesarului de memorie și al preciziei soluției obținute de către Nakata, Takahashi ș.a. Formulările comparate sunt $\mathbf{A} - \Phi$, $\mathbf{A} - \Phi - \Psi$, $\mathbf{A}^* - \Omega$, $\mathbf{T} - \Omega$, $\Xi - \Omega$. Se analizează efectele asupra parametrilor menționați, pentru fiecare din metode, pentru probleme test, dacă se modifică raportul dintre volumul conductorului și volumul întregului spațiu, forma conductorului, procentul ocupat de goluri din volumul total al conductorului, în cazul domeniilor multiplu-conexe, conductivitatea.

Se variază raportul dintre volumul total al conductorului și volumul total al spațiului și, luând metoda $\mathbf{A}^* - \Phi(\mathbf{E} - \Phi)$ drept referință, se observă că formularea $\mathbf{T} - \Omega$ este cea mai eficientă din punctul de vedere al timpului de calcul. Pentru evaluarea preciziei de calcul se folosește o metodă analitică și se constată că metoda $\mathbf{T} - \Omega$ este cea mai precisă, dacă se iau în considerare toate punctele de calcul.

Modificând forma conductorului (se schimbă astfel și raportul dintre numărul de puncte de pe frontieră și numărul total de puncte în domeniul conductor) se constată că $\mathbf{T} - \Omega$ își păstrează eficacitatea, formulările $\mathbf{A} - \Psi - \Omega$, $\mathbf{A}^* - \Omega$ fiind mai bune din punctul de vedere al necesarului de memorie și al timpului de calcul cu cât conductorul este mai alungit.

Modificând raportul dintre volumul conductorului și al golurilor se constată că timpul de calcul crește pentru metoda $\mathbf{T} - \Omega$.

Efectul modificării conductivității este însă notabil în privința creșterii erorii de calcul pentru formularea $\mathbf{A}^* - \Omega$.

În concluzie, dacă metoda $\mathbf{A}^* - \Omega$ pare la fel de bună ca și $\mathbf{T} - \Omega$ din punctul de vedere al timpului de calcul și al necesarului de memorie, la variația formei conductorului și a raportului conductor-spațiu izolant, eroarea este foarte mare la variația conductivității pentru formularea $\mathbf{A}^* - \Omega$.

O comparație între metodele integrale și cele diferențiale (de element finit) e prezentată de Trowbridge în [93], lucrare în care face și o sinteză a evoluției utilizării metodelor integrale în electromagnetism. În cazul metodelor de element finit (diferențiale), matricea sistemului este de tip bandă și este rară; la metodele integrale este plină. Calculul coeficienților sistemului obținut este simplu în cazul metodelor diferențiale, în cazul metodelor integrale trebuie calculate integrale multiple. Pentru aceeași problemă, se obține un număr mare de necunoscute în cazul metodei elementului finit, un număr mic în cazul metodelor integrale. De aici, comparația complexității algoritmilor indică o netă superioritate a celor utilizați în cazul metodelor diferențiale, efortul de calcul, pentru un anumit număr de necunoscute, fiind mai scăzut. Timpul de calcul al soluției este de ordinul $\Theta(N \log N)$ pentru metode diferențiale și de ordinul $\Theta(N^3)$ pentru cele integrale, dacă N este dimensiunea problemei. În cazul primelor, se discretizează în tot spațiul; numai în domeniile active, în cazul celor integrale. Dacă dorim să optimizăm dispozitivul studiat modificând distanțele între părțile active sau avem o problemă de mișcare în care deasemenea părțile active sunt în mișcare relativă, nu avem probleme cu discretizarea în cazul metodelor integrale, avem nevoie de refacerea rețelei de discretizare globale, în cazul metodelor diferențiale.

O analiză comparativă a metodelor integrale și diferențiale de calcul a problemelor de curenți turbionari e prezentată și de Albanese și Rubinacci în 1987 [12] dar și, mai nou, în 1995, de Albanese, Rubinacci ș.a. [13]. Se utilizează două metode diferențiale duale ($\mathbf{A} - \Phi$) și ($\mathbf{T} - \Omega$) (se furnizează astfel și o metodă de determinare a erorii constitutive în domeniul soluției, utilă pentru rafinarea soluției) și o metodă integrală ce reduce problema de câmp neliniară la rezolvarea unei rețele neliniare echivalente. Aplicarea acestor metode pentru analiza unui circuit magnetic masiv caracterizat prin prezența materialelor magnetice moi și dure și a întrefierurilor înguste conduce la un timp de lucru mai mare în cazul formulării ($\mathbf{A} - \Phi$) decât în cazul ($\mathbf{T} - \Omega$) sau al metodei integrale. Metoda integrală utilizată este eficientă în cazul rețelelor de discretizare regulate, pentru care se obțin timpi de calcul CPU mici și o acuratețe convenabilă. În [92], lucrare prezentată la ediția din 1995 de la Berlin a COMPUMAG-ului C.W. Trowbridge, președintele Societății COMPUMAG și al Vector Fields Ltd. a sintetizat rezultatele cercetărilor din ultimii ani și tendințele majore pâna în anul 2000. Prima direcție indicată este "3D analysis with rigid body motion - the use of integral methods and parallel processing" (analiza tridimensională cu corpuri rigide în mișcare - utilizarea metodelor integrale și calculul paralel). Posibilitatea utilizării metodelor integrale pentru analiza corpurilor tridimensionale în mișcare, cu sistemele de referință atașate corpurilor, considerând medii neliniare și cal-

culând forța și cuplul care acționează asupra corpurilor mobile folosind tensiuni maxwelliene este într-adevăr o soluție al cărei viitor pare asigurat de dezvoltarea metodelor de paralelizare a calculului în sisteme distribuite. Aplicarea acestor proceduri de calcul la studiul unor dispozitive electromecanice ca trenuri cu levitație magnetică, lagăre fără contact, lansatoare electromagnetice, promite o arie de utilizare foarte tentantă.

Capitolul 4

Câteva aspecte privind tratarea problemelor de curenți turbionari în medii în mișcare

În acest capitol nu am intenția să fac o prezentare exhaustivă a metodelor de calcul numerice prezente în literatură pentru calculul problemelor de curenți turbionari în medii în mișcare. Nu intenționez să fac nici măcar o prezentare sistematică. Voi urmări totuși trei aspecte pe care le consider importante:

1. În primul rând, voi încerca să stabilesc care sunt dificultățile specifice ale problemelor de curenți turbionari în medii în mișcare;
2. În al doilea rând, voi prezenta soluțiile folosite până acum pentru aceste probleme, încercând să detașez avantajele unora dintre aceste soluții și să pun în lumină contribuțiile timpurii sau recente pe care această lucrare le folosește;
3. În final, voi încerca să prezint câteva aplicații prezente în literatură.

4.1 Metode diferențiale sau integrale; sistem de referința fix sau mobil

În capitolul anterior am prezentat metode de calcul pentru curenți turbionari și am expus unele avantaje și dezavantaje ale metodelor prezentate. În cazul metodelor diferențiale, unul din dezavantaje este că discretizarea trebuie refăcută la fiecare pas de timp. O soluție folosită este, atunci când geometria problemei o permite, folosirea unei discretizări deajuns de regulate în zona de contact între mediile în mișcare, în așa fel încât la fiecare pas de timp numai o parte a rețelei să fie afectată. În cazul în care geometria nu o permite, folosirea multiplicatorilor Lagrange pare să fie soluția ideală. Dacă este folosită în schimb o metodă de tip BEM-FEM, hibridă sau integrală, această dificultate nu mai apare, rețeaua

de discretizare nu mai trebuie refăcută. Dezavantajul major în cazul acestor metode este că matricea sistemului nu mai rezultă nici rară (ca la BEM-FEM și la metode hibride) și este chiar plină (la metoda integrală Albanese-Rubinacci). Dimensiunea sistemului e în schimb mult mai mică în cazul acestor metode.

O altă dificultate majoră, în cazul metodelor diferențiale, este datorată termenilor de ordinul unu din sistemul de ecuații diferențial ce rezultă din formularea problemei pentru medii în mișcare. Într-adevăr, dacă se folosește un sistem de referință atașat laboratorului, imobil, ecuațiile câmpului pentru medii în mișcare vor include și un termen ce conține explicit viteza. Efectul acestui termen poate fi apariția instabilității numerice a sistemului de ecuații, pentru un număr Peclet > 1 . Numărul Peclet leagă proprietățile de material ale mediilor în mișcare, dimensiunea geometrică a pasului local al rețelei de discretizare și viteza de deplasare a corpurilor în mișcare:

$$Pe = \frac{v\sigma h}{\nu} \quad (4.1)$$

unde:

1. Pe este numărul Peclet;
2. v - este viteza;
3. $\sigma = 1/\rho$ este conductivitatea materialului;
4. $\nu = 1/\mu$ este susceptivitatea magnetică a mediului;

În Anexa B se prezintă definiția numărului Peclet și se discută influența valorii acestuia pentru stabilitatea numerică a sistemului de ecuații considerat. Influența numărului Peclet asupra stabilității numerice a sistemului de ecuații e discutată de Williamson și Chan în [95], de Nakata [74] de Ito și Takahashi [56].

Soluțiile pentru înlăturarea acestei probleme sunt două. Soluția clasică este "up-winding". În Anexa B prezintă după definiția numărului Peclet în electrotehnică și această soluție pentru eliminarea instabilității la viteze mari, pentru care numărul Peclet este supraunitar. Acesta se poate face fie prin modificarea funcțiilor de formă simetrice [56] fie prin deplasarea punctelor de integrare Gauss la integrarea numerică [95]. În oricare din aceste metode se folosește "up-wind" optimal, cu valoarea pentru coordonata ξ în cazul unidimensional:

$$\xi = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (4.2)$$

Up-winding-ul optimal dă rezultate foarte bune chiar și atunci când vitezele sunt mari deci pentru numere Peclet mari.

Discuția asupra stabilității se poate face și în funcție de numărul Courant (vezi Anexa C). Pentru numere Peclet mari, impunând totuși o condiție Courant care corelează pasul de timp cu pasul rețelei în direcția mișcării și viteza (trebuie redus pasul de timp pentru a reduce numărul Courant sub valoarea 1), Kameari [61] obține rezultate stabile și foarte

apropiate de valorile analitice, deși numărul Peclet este mare. Dar reducerea pasului de timp nu este întotdeauna o soluție acceptabilă, arată Bossavit în [22], unde folosește o metodă FEM-BEM pentru rezolvarea unei probleme cuplate mecanice și electromagnetice. Atunci soluția eliminării instabilității numerice datorată termenului de ordinul unu, care conține viteza poate fi alegerea unui alt sistem de referință, în așa fel încât termenul care conține viteza explicit să dispară. Aceasta înseamnă să se folosească un sistem de referință atașat corpurilor în mișcare. Soluția este propusă și de Nakata [74], pentru o problemă în care include și medii neliniare, într-o formulare diferențială, și de Bossavit [22], într-o formulare BEM-FEM, de Kettunen [91], cu o formulare hibridă, de Albanese, Hăntilă, Preda și Rubinacci [5], cu o metodă integrală (vezi și [11]) dar și de Kurz și Fetzer [66] [65], cu o formulare FEM-BEM. Pentru numere Peclet mari, această soluție pare să fie excelentă [74] [22] [66]. Nu pot fi neglijate lucrările lui Formisano și Villone [40] pentru sprijinirea opțiunii pentru formularea Lagrangiană, adică scrierea ecuațiilor în sistemul de referință atașat corpurilor. Putem alege oricâte sisteme de referință atașate corpurilor în mișcare, arată Kurz și Fetzer [66] dar Bossavit o arătase deja în [22]. În [51] [5] [44] [6] am arătat că se poate atașa câte un sistem de referință fiecărui corp conductor sau fiecărei grupe de corpuri conductoare ce se mișcă cu aceeași viteză.

4.2 Câteva aplicații numerice în probleme cu medii în mișcare

Williamson și Chan, în 1993, prezintă rezultatele obținute cu o formulare $\mathbf{A} - \Phi - \Psi$ pentru o problemă implicând curenți turbionari, medii neliniare magnetic și mișcare relativă [95]. Sistemul de referință este atașat laboratorului iar numărul Peclet obținut pentru aplicația propusă e superior lui 2. Pentru a elimina oscilațiile nefizice ale soluției ecuației diferențiale se folosește up-winding cu deplasarea punctelor de integrare Gauss la integrarea numerică pentru termenii de ordinul unu în ecuația diferențială. H.T. You, K.R. Shao, K.D. Zhou, J.D. Lavers [96] propun, pentru o problemă de curenți turbionari cu medii în mișcare, folosirea unor funcții pondere modificate folosind up-winding-ul optimal. Variante ale acestei metode sunt amintite de Williamson și Chan [95] și sunt prezente și la Z. Liu, G.E. Eastham și G.E. Dawson [68].

Pentru a elimina problema instabilității soluției numerice care apare la viteze mari, pentru numere Peclet mari, K. Muramatsu, T. Nakata, N. Takahashi și K. Fujiwara propun folosirea unui sistem de referință atașat corpului în mișcare; ei folosesc o combinație între metoda diferențelor finite și metoda fazorilor. Autorii ajung la concluzia că în cazul vitezelor mici trebuie utilizat în continuare sistemul de referință fix iar pentru viteze mari ($Pe > 1$) este necesară utilizarea sistemului de referință mobil, soluția obținută fiind stabilă chiar și pentru viteze foarte mari.

Kuo-Ta-Hiesh [54] folosește tot un sistem de referință atașat corpurilor în mișcare, pentru o aplicație la lansatoare electromagnetice. El observă că folosind o formulare Lagrangeiană se elimină instabilitatea numerică la viteze foarte mari. Kuo-Ta-Hiesh folosește formularea $(\mathbf{A} - V)$ cu o condiție de etalonare Coulomb pentru \mathbf{A} .

T. Onuki, S. Wakao, T. Yoshizava [79] utilizează tot un sistem de referință atașat corpurilor în mișcare, pentru a elimina oscilațiile soluției la viteze mari (pentru aplicația propusă de ei, valorile numărului Peclet sunt $Pe=0.785$ pentru $v = 5$ m/s și $Pe=7.85$ pentru $v=50$ m/s).

În ultimii ani echipa de la Universitatea din Bath comunică rezultate privind modelări cu elemente finite ale problemelor de curenți turbionari tridimensionale, cu medii în mișcare. N. Allen, D. Rodger, H.C. Lai, P.J. Leonard modelează plăci subțiri conductoare având o mișcare cu viteză în direcția planului plăcii cu ajutorul a două mărimi scalare (T și componenta normală a lui \mathbf{B}) [31]. Se compară rezultatele obținute prin aplicarea acestei metode cu rezultatele obținute cu metoda $(\mathbf{A} - \Phi)$. Aceste metode $(T - \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} - \Psi)$ și $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} - \Psi)$ se pot utiliza în cazul în care conductorul în mișcare are grosimea mai mică decât adâncimea de pătrundere a materialului, caz în care densitatea de curent se poate considera constantă în adâncimea regiunii conductoare, plăcile conductoare putând fi modelate ca elemente de suprafață.

P.C. Coles, D. Rodger, H.C. Lai, P.J. Leonard propun, pentru probleme de curenți turbionari în care conductivitatea mediului în mișcare este foarte mică, utilizarea a două potențiale scalare [32]. Într-adevăr, pentru dispozitivele care includ conductoare invariante secțiunea transversală perpendiculară pe direcția de mișcare se poate folosi o metodă cu elemente finite în care \mathbf{A} și V sunt necesare. Dacă însă conductivitatea mediului în mișcare este foarte mică, câmpul magnetic indus de curenții turbionari este foarte mic și poate fi neglijat. Și în acest caz este mult mai economic să se formuleze problemele utilizând două potențiale scalare. Se investighează problema lichidului conductor dintr-o conductă cu doi electrozi perpendiculari pe câmp și fluxul de lichid.

Alte aplicații în care apare mișcarea sunt sistemele de frânare electromagnetică, modelate de o echipă de la LEG, cu N. Labee, Y. Marechal, G. Meunier și H. Ben Harara [67]. Curenții turbionari tranzitorii în conductoare neliniare magnetice în mișcare sunt modelați cu elemente finite. Se utilizează o formulare în \mathbf{A} și o tehnică de omogenizare, pentru a face geometria unei regiuni în mișcare invariantă în direcția vitezei. Se poate astfel elimina utilizarea multiplicatorilor Lagrange pentru cuplarea celor două discretizări diferite din mediile active în mișcare. Se compară utilizarea sistemului de referință fix și în mișcare.

Tot un sistem de frânare folosind curenți turbionari dar pentru trenuri de mare viteză studiază și D. Albertz, S. Papan și G. Hennenberg [14]. Se folosește o formulare $\mathbf{A} - V - \mathbf{A}$ cu condiția de etalonare Coulomb și o procedură iterativă de subrelaxare pentru materialele neliniare.

În ultima vreme se utilizează tot mai mult metode integro-diferențiale sau integrale pentru rezolvarea problemelor de curenți turbionari incluzând mișcarea.

Bossavit [22] propune o metodă având la bază o formulare Lagrangeană pentru curenți turbionari în conductoare deformabile. Metoda este o metodă de tip BEM-FEM iar problema propusă este cea a unei plăci feromagnetice subțiri supusă acțiunii a două câmpuri magnetice: unul uniform și constant în timp și altul produs de o bobină parcursă de un impuls de curent. Sub acțiunea forțelor de natură electromagnetică placa se deformează.

Bossavit insistă asupra faptului că problemele instabilității soluției numerice nu dispar dacă se folosește un sistem de referință atașat corpurilor în mișcare, această fenomen manifestându-se pur și simplu în alt fel. Folosirea unei scheme de integrare în timp de tip θ , cu $\theta > 1/2$, dacă nu se poate accepta scăderea pasului de timp, pentru a elimina instabilitatea soluției numerice, pare să fie soluția ideală.

Folosind rezultatele lui Albanese, Hăntilă și Rubinacci, echipa din Pisa formată din Esposito, A. Musolino ș.a. a dezvoltat, începând din 1995, o metodă pentru calculul curenților turbionari în medii conductoare și neliniare magnetic în mișcare, considerând sistemele de referință plasate atât în sistemul laboratorului cât și atașate corpului în mișcare. Astfel, apare și un termen conținând explicit viteza [37]. În lucrarea citată, Esposito, Musolino ș.a. nu discută problema stabilității soluției numerice.

Echipa de la Tampere folosește formulările hibride dezvoltate de Kettunen și Forsman [41] pentru probleme de curenți turbionari și pentru aplicații în care apar corpuri rigide în mișcare [91]. Sunt folosite sisteme de referință atașate corpurilor în mișcare și o integrare în timp folosind Runge-Kutta, cu un pas de timp suficient de mic pentru a nu constata instabilitatea soluției numerice.

Kurz și Fetzer, utilizând o formulare proprie FEM-BEM dezvoltată pentru medii conductoare și neliniare magnetic, sisteme de referință atașate corpurilor rigide în mișcare, [66] [63] tratează probleme cuplate electromagnetice și mecanice. Calculând forțele ce acționează asupra unei plăci de aluminiu plasate deasupra unui ansamblu inductor format din două bobine coaxiale [66] [63], Kurz și Fetzer rezolvă ecuația mecanică descriind traiectoria plăcii sub acțiunea forțelor de natură magnetică. O altă aplicație [39] este a unui motorăș de ceas la care bobina inductoare este alimentată în tensiune.

În câteva aplicații intervine calculul forței de levitație și studiul stabilității mecanice; e vorba de aplicații cu trenuri cu levitație magnetică (MAGLEV), lansatoare electromagnetice și rulmenți fără contact.

Problema cuplată, a evoluției plasmei în apropierea peretelui conductor, după căderea sistemului de control vertical în Tokamakuri, este studiată de Albanese, Formisano, Fresa, martone, Rubinacci și Villone [3]; dacă plasma se apropie de peretele conductor, cresc curenții care evoluează parțial în plasmă, parțial în peretele conductor. mai multe modele ale plasmei sunt propuse; pentru modelul plasmei cu masă nulă, analiza curenților halou se poate face cu o formulare electromagnetică simplă.

M. Enokizono, T. Tadaka ș.a. utilizează metoda elementelor de frontieră, calculând și forțele electromagnetice cu metoda integrării tensorului tensiunilor maxwelliene, pentru a stabili mișcarea metalului topit și levitat sub acțiunea câmpului magnetic; pentru determinarea distribuției inducției magnetice \mathbf{B} , se rezolvă întâi ecuațiile câmpului apoi se determină forțele și momentele de rotație. Pentru asigurarea stabilității este importantă forma bobinei excitante.

Mai vechile preocupări ale lui Yonnet (1981) [1] privind lagărele fără contact cu magneți permanenți sau ale lui M. Marinescu și N. Marinescu (1989) privind stabilitatea unui sistem de rulmenți fără contact folosind levitația asigurată de magneți permanenți și

sisteme supraconductoare sunt reluate de M. C. Marion-Pera și J. P. Yonnet [70]; supraconductorul este tratat ca un material diamagnetic perfect; mai multe forme ale părți levitate sunt luate în considerare. În astfel de aplicații forța de levitație, care asigură susținerea și derivata forței de revenire, care asigură stabilitatea, trebuie să fie cât mai mari. De aceea se iau în considerare magneți permanenți puternici și forme geometrice care să asigure auto-stabilitatea, în sistemele cu auto-reglare, pe de o parte sau bobine supraconductoare și sisteme de control ultra-rapide, pe de altă parte, în sistemele care folosesc dispozitive electronice pentru controlul stabilității.

Utilizarea formulărilor clasice FEM sau BEM pentru rezolvarea problemelor de levitație sau stabilitate pentru lansatoare electromagnetice sau tunuri electromagnetice este destul de limitată (a se vedea și lucrările lui Ki-Bong Kim, Z. Zabar, E. Levi [64] și I.R. Shokair [89]); scheme echivalente cu circuite în regim tranzitoriu sunt mai răspândite (vezi H.A. Calvin și S.A. Virostek [27]); în unele aplicații însă, se consideră problema de curenți turbionari cu corpuri în mișcare, ca la Rainsworth, Rodger și Leonard [84].

Capitolul 5

Ecuatia integrală a densității de curent în medii conductoare, în mișcare

5.1 Ecuatia integrală a curenților turbionari

Fie un domeniu de calcul conductor, notat cu Ω_C , care poate fi format din unul sau mai multe corpuri conductoare Ω_k , $\Omega = \bigcup \Omega_k$. Fie \mathbf{J}_0 densitatea de curent impusă. Ea e localizată în bobinele parcurse de curent (pot fi bobine supraconductoare fasciculare). Bobinele (care pot fi și supraconductoare) au o valoare impusă pentru \mathbf{J}_0 care trebuie să fie luată uniformă în secțiune transversală. Fie \mathbf{J} densitatea curenților turbionari. Ea este localizată în toate corpurile conductoare ce pot fi în mișcare. Întregul spațiu are permeabilitatea magnetică a vidului μ_0 (vezi Figura 5.1).

Sistemele de coordonate sunt fixate pe corpurile conductoare. Din legea lui Faraday avem:

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}V \right) \quad (5.1)$$

Formula Biot-Savart-Laplace ne dă potențialul vector:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{J}}{r} dv + \mathbf{A}_0 \quad (5.2)$$

unde \mathbf{A}_0 este potențialul vector produs de densitatea de curent impusă \mathbf{J}_0 , Ω_C este domeniul curenților turbionari. Din ecuațiile (5.1) și (5.2) se obține ecuația curenților turbionari:

$$\mathbf{J}(P) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N_C} \int_{\Omega_C k} \frac{\mathbf{J}(Q)}{r(P, Q)} dv_Q + \text{grad}V = - \frac{\partial \mathbf{A}_0(P)}{\partial t} \quad (5.3)$$

unde ρ este rezistivitatea în punctul P. În relația 5.3 am mai notat cu:

- N_C numărul de corpuri conductoare;

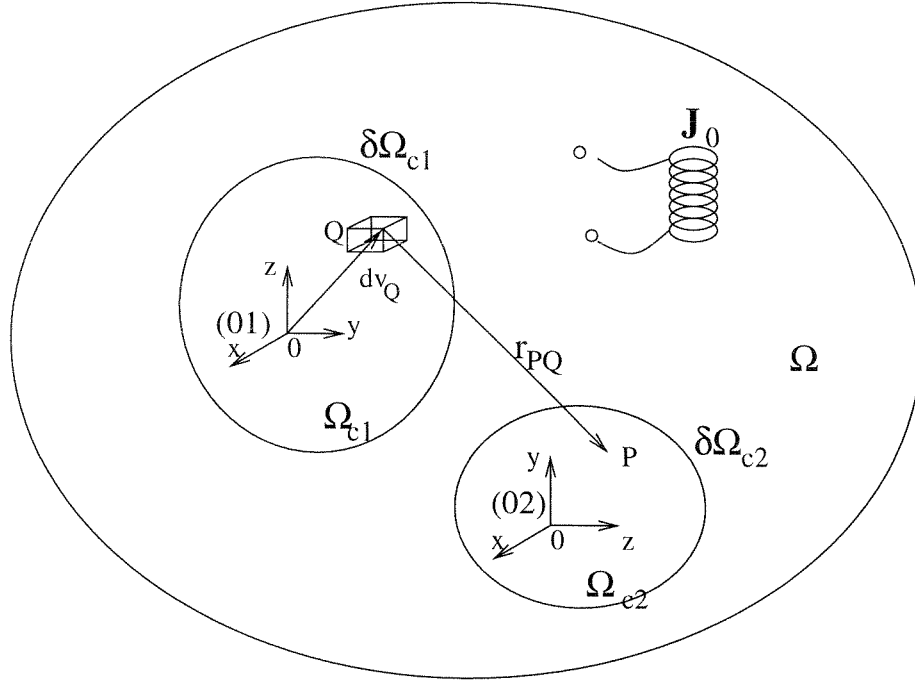


Fig. 5.1: Domeniul problemei de curenți turbionari

- Ω_{Ck} corpul conductor k ;
- P , punctul în care se calculează mărimile de câmp;
- Q , punctul curent de integrare în domeniul sursă;
- $r(P, Q)$, distanța dintre punctele P și Q .

Relația (5.2) este obținută conform regimului staționar, în care este dat câmpul densității de curent. Această relație nu depinde de mișcarea corpurilor. Relația (5.1) depinde de variația în timp a intensității câmpului electric \mathbf{E} deci de variația în timp a densității de curent \mathbf{J} . Relația (5.3) reprezintă o ecuație integrală a densității de curent în care nucleul $1/r$ și termenul liber \mathbf{A}_0 depind de timp. Viteza nu apare explicit în aceste ecuații. Fiecărui corp conductor în mișcare îi atașăm un sistem de referință propriu, în care sunt calculate mărimile de câmp locale.

5.1.1 Potențialul electric vector

Legea circuitului magnetic impune condiția de etalonare pentru \mathbf{J} : $\text{div}\mathbf{J} = 0$. Această condiție e asigurată introducând potențialul electric vector \mathbf{T} ca:

$$\text{rot}\mathbf{T} = \mathbf{J} \quad (5.4)$$

Deci \mathbf{T} este asociat densității de curent \mathbf{J} . Pe frontiera $\partial\Omega_C$ avem condiția:

$$\mathbf{Jn} = n\text{rot}\mathbf{T} = 0 \quad (5.5)$$

Evident, relațiile (5.4) și (5.5) nu pot să definească în mod unic potențialul \mathbf{T} . Trebuie să adăugăm o condiție de etalonare pentru \mathbf{T} .

5.1.2 Soluția lui Galerkin pentru ecuația curenților turbionari

Fie funcțiile \mathbf{N}_k definite pe Ω_C și având $rot\mathbf{N}_k$ liniar independente. Considerăm:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \mathbf{N}_k \quad (5.6)$$

și dacă proiectăm ecuația (5.3) pe funcțiile liniar independente $rot\mathbf{N}_k$ și integrăm pe întreg domeniul Ω_C atunci:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \rho rot\mathbf{N}_k dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} \int_{\Omega_C} \frac{1}{r} rot\mathbf{N}_k rot\mathbf{T} dv dv = \\ - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k \mathbf{A}_0 dv \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.7)$$

Datorită relației (5.5) avem (vezi și Anexa A):

$$\int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k gradV dv = 0 \quad (5.8)$$

Folosind relația (5.6), relația (5.7) conduce la următorul sistem liniar de ecuații diferențiale:

$$\{R\}[I] + \frac{d}{dt} (\{L\}[I]) = [U] \quad (5.9)$$

unde $[I]$ este un vector de forma:

$$I = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))^T \quad (5.10)$$

iar:

$$U = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t))^T \quad (5.11)$$

cu:

$$U_k = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k \mathbf{A}_0 dv \quad (5.12)$$

și $\{R\}$, $\{L\}$ sunt matrici cu termenii generali de forma:

$$R_{ik} = \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_i rot\mathbf{N}_k dv \quad (5.13)$$

$$L_{ik} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} \int_{\Omega_C} \frac{1}{r} rot\mathbf{N}_i rot\mathbf{N}_k dv dv \quad (5.14)$$

În ecuația (5.9) o parte dintre coeficienți se schimbă în timp datorită mișcării corpurilor conductoare. Acești coeficienți sunt acei termeni L_{ik} pentru cazul în care i și k sunt asociați corzilor plasate în corpuri conductoare diferite și termenii U_k , dacă se asociază lui k muchii din corpuri care se deplasează fața de bobinele parcurse de curent.

5.1.3 Elemente de muchie și condiția de etalonare topologică

Divizăm domeniul conductor Ω_C în subdomenii ω_i . Considerăm, pentru simplitate, toate aceste domenii de formă tetraedrală. Admitem că în fiecare tetraedru dependența potențialului vector \mathbf{T} este liniară față de coordonata baricentrică \mathbf{R} și are forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{R} \quad (5.15)$$

Cunoscând integralele de linie ale lui \mathbf{T} pe muchiile tetraedrelor, atunci \mathbf{T} este bine definit oriunde în interiorul tetraedrelor. Valorile pentru coeficienții vectoriali \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt:

$$\mathbf{a} = \frac{\tau_1 (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) + \tau_2 (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1) + \tau_3 (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)}{6\nu} = -\frac{\tau_1 \mathbf{S}_1 + \tau_2 \mathbf{S}_2 + \tau_3 \mathbf{S}_3}{3\nu} \quad (5.16)$$

și:

$$\mathbf{b} = \frac{(\tau_2 - \tau_3 + \tau_{23}) \mathbf{R}_1 + (\tau_3 - \tau_1 + \tau_{31}) \mathbf{R}_2 + (\tau_1 - \tau_2 + \tau_{12}) \mathbf{R}_3}{6\nu} \quad (5.17)$$

unde τ_i și τ_{ij} sunt integralele de linie ale lui \mathbf{T} pe muchiile P_0P_i și P_iP_j , ν este volumul tetraedrului și S_i este aria orientată a tetraedrului (vezi Figura 5.2)

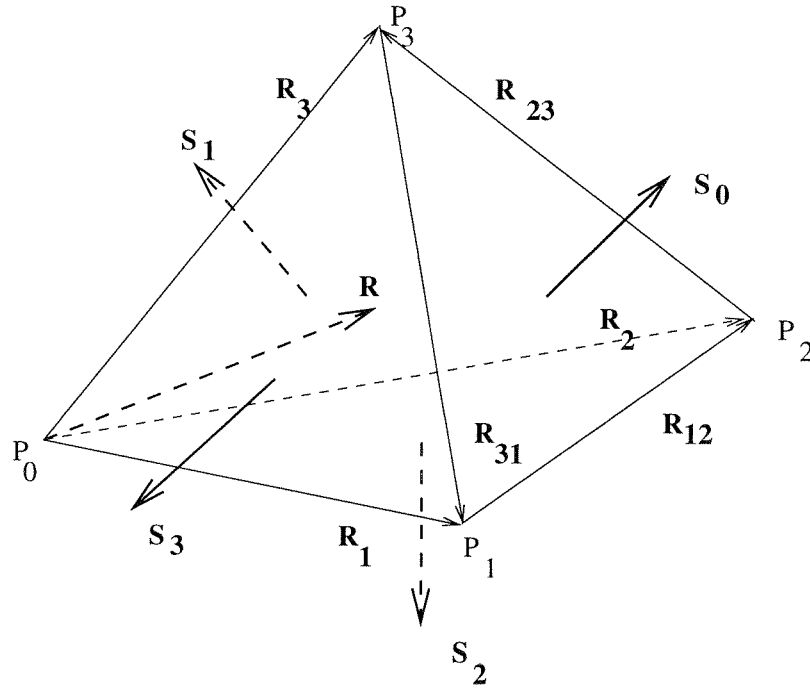


Fig. 5.2: Tetraedru cu muchiile și suprafețele orientate

Considerăm acum funcția \mathbf{M}_k , funcție care are comportarea impusă de relația (5.15) în fiecare tetraedru și care are valori de muchie unitate pe muchia k și valori de muchie nule pentru fiecare muchie $i \neq k$;

$$\mathbf{M}_k = \begin{cases} \dots & \dots \\ -\frac{\mathbf{S}_{i1}}{3\nu_i} + \frac{\mathbf{R}_{i23}}{6\nu_i} \times \mathbf{R} & \text{daca } P \in \omega_i \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (5.18)$$

unde i este indicele unui tetraedru ω_i având muchia k Relația (5.18) definește elementul de muchie k .

Observații

(O5.1) Dacă muchia k e orientată de la punctul P_i la punctul P_j și W_i, W_j sunt elemente nodale ale punctelor i și j , atunci:

$$\mathbf{M}_k = W_i \text{grad} W_j - W_j \text{grad} W_i$$

(O5.2) Se poate observa ușor că:

- (a) $\text{div} \mathbf{T} = 0$ în interiorul tetraedrelor;
- (b) $\text{rot} \mathbf{T} = 2\mathbf{b}$;
- (c) componenta tangențială alui \mathbf{T} se conservă la suprafețele de separație;
- (d) componenta normală a lui \mathbf{T} nu se conservă la suprafețele de separație;
- (e) componenta normală a lui $\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{T}$ se conservă la suprafețele de separație. De aceea, divergența de volum a lui \mathbf{J} este peste tot zero;
- (f) pe o față mărginită de muchiile k, l, m fluxul lui \mathbf{J} este dat de integrala curbilinie a lui \mathbf{T} pe muchiile k, l, m

Să considerăm graful muchiilor unei rețele de elemente finite, având o descompunere în arbore-coarbore. Evident, integrala pe o curbă închisă a lui \mathbf{T} definește în mod unic fluxul lui \mathbf{J} pe fața mărginită de muchiile buclei. Dar fluxurile lui \mathbf{J} nu pot defini în mod unic valorile de muchie ale lui \mathbf{T} . Se cunoaște din teoria circuitelor că putem adăuga orice valori pe muchiile arborelui dacă, pentru muchiile coarborelui adăugăm valori care să verifice legea a doua a lui Kirchhoff. În particular, putem anula valorile de pe muchiile coarborelui. De aceea, fluxurile lui \mathbf{J} pe fețe definesc valorile lui \mathbf{T} pe muchiile coarborelui, și aceste valori sunt unice.

Condiția topologică de mai sus este o condiție de etalonare care asigură unicitatea valorilor pe muchii ale lui \mathbf{T} . Aceste valori sunt impuse nule pe muchiile arborelui și pot să fie nenule pe muchiile coarborelui. De aceea, gradele de libertate ale lui \mathbf{T} sunt date de numărul muchiilor coarborelui.

Condiția pe frontieră (5.5) anulează orice integrală curbilinie pe o curbă închisă a lui \mathbf{T} în lungul frontierei $\partial\Omega_C$. Rezultă că trebuie să definim mai întâi arborele de (pe) frontieră, și după aceea arborele muchiilor din interiorul domeniului Ω . Aceste valori pe muchiile coarborelui de frontieră sunt nule.

Pentru domenii multiplu conexe, nu putem anula toate integralele lui \mathbf{T} aparținând frontierei $\partial\Omega_C$. Avem bucle care înconjoară suprafața $\partial\Omega_{C1}$ (vezi γ_1 și Γ în Figura 5.3) și integralele lui \mathbf{T} pe aceste curbe nu pot fi făcute nule. Avem o mulțime $\{j\}$ de ramuri ale coarborelui pe orice suprafață $\partial\Omega_{C_i}$ care închide bucle în interiorul aceluiași domeniu Ω_{C_j} (de exemplu mulțimea $\{j\}$ pe suprafețele $\partial\Omega_{C_i}$ și $\partial\Omega_{C_i}$ în Figura 5.3).

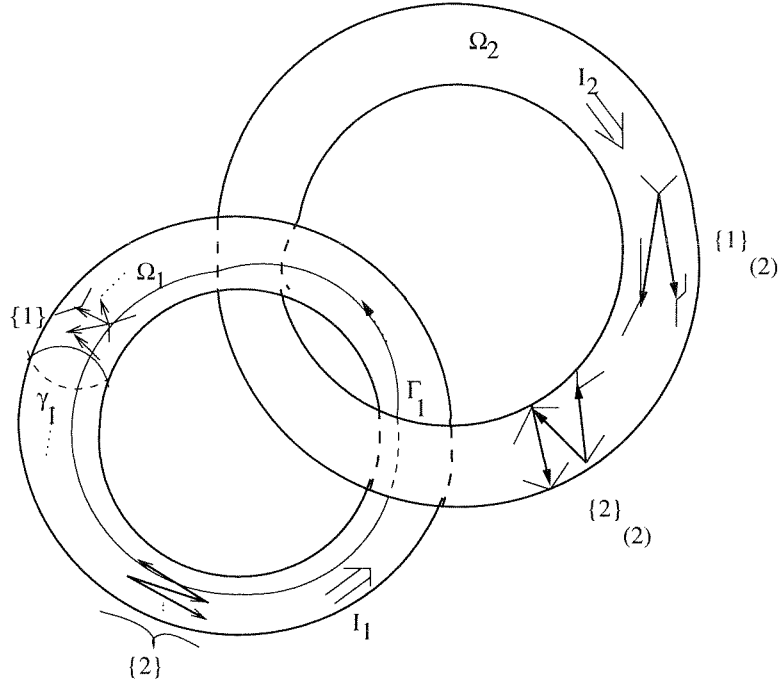


Fig. 5.3: Familii de corzi exterioare pentru domenii multiplu conexe

Toate muchiile coarborelui aparținând mulțimii $\{j\}$ au aceeași (necunoscută) valoare de muchie (de exemplu i_1 pentru muchiile mulțimii $\{1\}$). Dacă muchiile coarborelui închid bucle care înconjoară mai multe domenii, atunci ele au valori definite ca suma valorilor pentru acest domeniu (de exemplu, muchiile coarborelui care aparțin mulțimii $\{k\}$ au valoarea $i_1 + i_2$ în Figura 5.4).

Fie \mathbf{N}_k funcțiile având valori de muchie unitate pentru toate muchiile aparținând mulțimii $\{k\}$ și valori nule pe muchii în rest:

$$\mathbf{N}_k = \sum_{i \in (k)} \mathbf{M}_i$$

În interiorul domeniului $\Omega = \bigcup \Omega_k$ considerăm:

$$\mathbf{N}_j = \mathbf{M}_j.$$

Relația (5.6) ne dă:

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j(t) \mathbf{N}_j \mathbf{i} + \sum_{k=1}^{n_b} i_k(t) \mathbf{N}_k \quad (5.19)$$

unde n_i este numărul de muchii ale coarborelui în interiorul domeniului Ω_C și n_b e numărul de mulțimi de muchii de frontieră. Relațiile sunt valabile și pentru domenii multiplu-conexe. În acest caz notăm:

$$I = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_i}, i_1, i_2, \dots, i_{n_b})$$

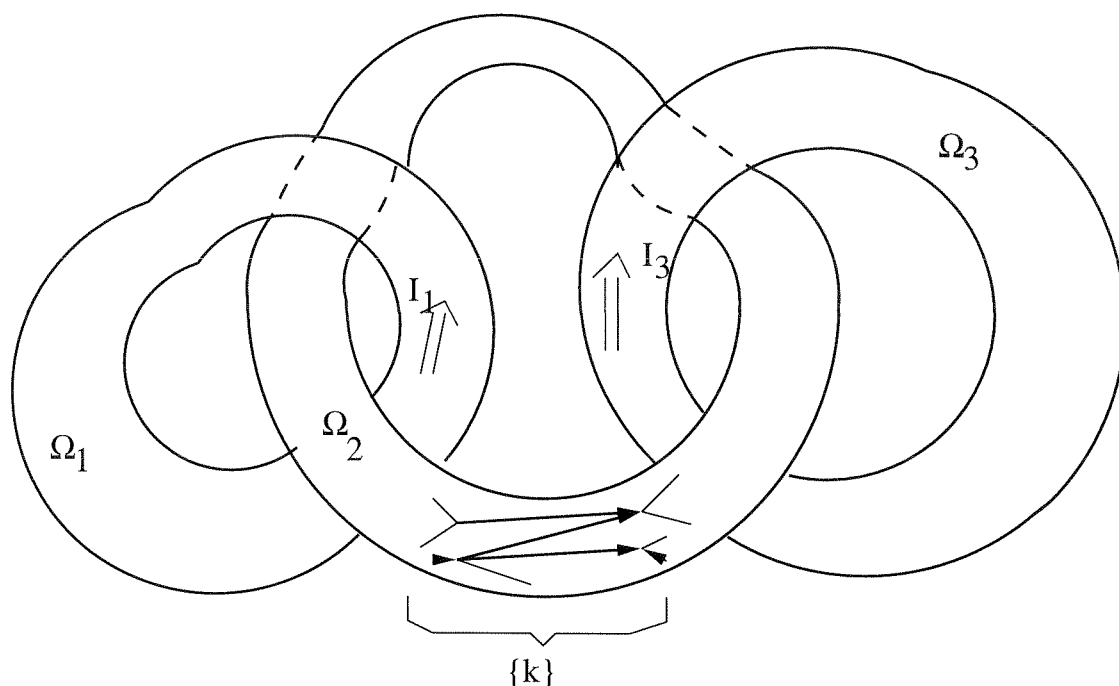


Fig. 5.4: Domeniu multiplu conex, alegerea unui sistem de corzi pe frontieră

5.2 Rezolvarea numerică a ecuației de curenți turbionari în medii conductoare

5.2.1 Alegerea arborelui pentru domenii simplu conexe

Golias și Tsiboukis [42] indica pentru probleme de magnetostatică utilizând potențialul vector, o slabă convergența a solverului iterativ ICCG în cazul utilizării unui arbore; o îmbunătățire se poate obține prin dezvoltarea arborelui în direcția ortogonală planului în care modulul inducției magnetice \mathbf{B} are valori maxime. Golovanov ș.a. [43], folosind o formulare $\mathbf{T} - \Omega$ și elemente de muchie, nu utilizează un arbore tot din motive de convergență.

Albanese și Rubinacci [11], [2] utilizând metodă integrală prezentată pentru corpuri imobile, potențialul electric vector \mathbf{T} și un arbore, demonstrează că se obține aceeași soluție pentru oricare arbore ales. Un avantaj al utilizării arborelui este și reducerea notabilă a numărului de necunoscute.

Arborele trebuie construit începând cu frontiera, în așa fel încât să se obțină un arbore complet cu nodurile de pe frontieră. Astfel, cum impunem pe ramuri circulațiile lui \mathbf{T} nule, condiția de frontieră

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$$

se obține în mod natural, pentru $\mathbf{T} = 0$ pe ramurile coarborelui format cu muchiile de pe frontieră. Se continuă apoi arborele adăugând noduri interioare, astfel încât cuplarea arborelui exterior cu cel interior să se facă printr-o singură muchie. Cum necunoscutele

sunt asociate muchiilor coarboarelui interior, sistemul se formează eliminând muchiile aparținând arborelui interior, după ce am eliminat toate muchiile aparținând grafului exterior. În calculul soluției în \mathbf{J} vor intra ulterior și valorile circulațiilor pe corzile exterioare, care sunt nule. Astfel, numărul de necunoscute se reduce la numărul de corzi în coarboarele interior.

5.2.2 Calculul termenului R_{ik}

Termenii R_{ik} sunt nenuli doar dacă muchiile i și k au un comun cel puțin un tetraedru, deci între ele există o relație de "vecinătate". De aceea, matricea $\{R\}$ nu se modifică în timp, este rară și este formată din blocuri asociate fiecărui corp. Termenii acestei matrice trebuie calculați deci o singură dată și numai pentru muchii situate în același tetraedru. Cum \mathbf{J} este constant în fiecare tetraedru, este posibilă scrierea unei formule analitice pentru calculul lui $\{R\}$:

$$\{R\} = \rho \sum_{T_j \supset k, i} \mathbf{b}_{ij} \cdot \mathbf{b}_{kj} \cdot \mathbf{v}_j \quad (5.20)$$

unde $\mathbf{b}_{kj} = \text{rot} \mathbf{N}_k$ în tetraedrul T_j și V_j este volumul tetraedrului care conține muchiile k și i (vezi și Figura 5.5. Dacă avem două corpuri conductoare, matrice $\{R\}$ poate să

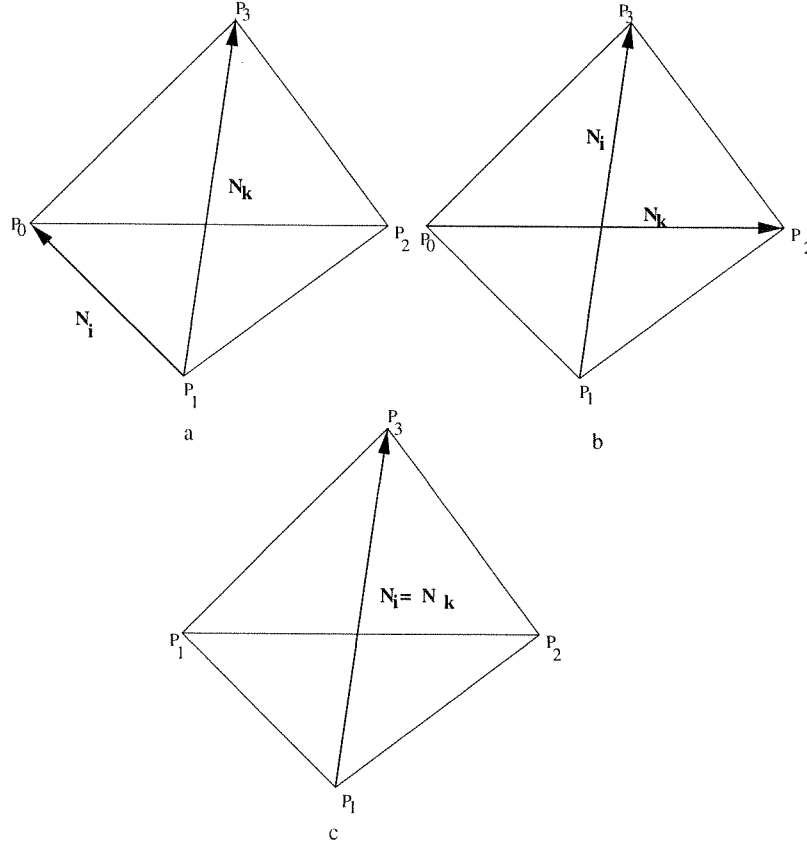


Fig. 5.5: Pozițiile posibile ale muchiilor i și k într-un tetraedru a) tetraedrul conține muchiile i și k alăturate; b) tetraedrul conține muchiile i și k opuse; c) muchiile i și k sunt identice

fie scrisă, separând blocurile referitoare la corpul 1 și corpul 2.

$$\{R\} = \begin{bmatrix} [R_{11}] [0] \\ [0] [R_{22}] \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Există două tetraedre care conțin muchiile i și k alăturate, unul singur conținând muchiile opuse și 4 pâna la 6 tetraedre (depinzând de tipul discretizării) care conțin o muchie (cazul în care k este identic cu i). Este utilă folosirea unei liste, ordonată după muchii, cu tetraedrele ce includ fiecare muchie pentru a elimina căutările repetate în lista tetraedrelor.

5.2.3 Calculul termenului L_{ik}

Albanese, Rubinacci [11] propun calculul termenilor de acest tip folosind formule de quadratură Gauss pentru evaluarea integralelor duble de volum, singularitatea datorată nucleului $1/r$ fiind eliminată printr-un artificiu numeric. Urankar [94] propune folosirea unor formule analitice pentru integrale simple de volum. Se transformă integrala de volum într-o integrală de suprafață și în continuare se exprimă integrala de suprafață în funcție de integralele pe muchiile ce mărginesc suprafața. Aplicarea acestor formule este însă costisitoare în ceea ce privește timpul de calcul. O variantă de calcul folosește și aceste integrale. Se pot calcula termenii L_{ik} de acest tip:

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\mathbf{T}_j \subset i} \mathbf{b}_{ji} \sum_{\mathbf{T}_l \subset k} \mathbf{b}_{lk} \int_{T_j} \int_{T_l} \frac{1}{r} dv dv \quad (5.22)$$

unde $\mathbf{b}_{ij} = \text{rot}\mathbf{N}_i$ în tetraedrul T_j și $\mathbf{b}_{lk} = \text{rot}\mathbf{N}_k$ în tetraedrul T_l . Matricea este plină. Fie:

$$I_{jl} = \int_{T_j} \int_{T_l} \frac{1}{r} dv dv \quad (5.23)$$

Tratamentul singularității indusă de nucleul $1/r$ în I_{jl} este necesar doar dacă tetraedrele j și l au o față în comun sau sunt identice. Folosind o formulă de integrare prin părți, ecuația (5.23) poate fi transformată în:

$$I_{jl} = \int_{T_j} \int_{T_l} \frac{1}{r} dv dv = -\frac{1}{2} \oint_{\partial T_j} \oint_{\partial T_l} r \mathbf{n}_j \mathbf{n}_l dA_j dA_l = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^4 \sum_{b=1}^4 \mathbf{n}_{ja} \mathbf{n}_{lb} \oint_{\partial T_{ja}} \oint_{\partial T_{lb}} r dA_{ja} dA_{lb} \quad (5.24)$$

Integrala dublă de suprafață pe perechea de suprafețe $(\partial T_{ja}, \partial T_{lb})$ a tetraedrelor T_j și T_l e calculată numeric. O variantă, propusă în [51], [5], [44] este să discretizăm fața tetraedrului folosind o rețea triunghiulară regulată cu n^2 elemente triunghiulare dacă n este diviziunea pe una din laturile feței tetraedrului. Poziția unui punct curent în rețeaua de discretizare poate fi parametrizată în funcție de pozițiile vârfurilor triunghiului. Discretizarea suprafețelor se alege mai fină dacă suprafețele ∂T_{ja} și ∂T_{lb} sunt apropiate și

poate fi mai puțin fină atunci când cele două suprafețe sunt mai depărtate. Formula de integrare este (vezi Figura 5.6):

$$I_{jalb} = \int_{\partial T_{ja}} \int_{\partial T_{lb}} r dA dA = \frac{\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_l}{n^4} \cdot \left\{ \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1-p} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n-1-r} \mathbf{r}_{pq^1rv^1} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-r} \mathbf{r}_{pq^1rv^2} \right] + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-p} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n-1-r} \mathbf{r}_{pq^2rv^1} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-r} \mathbf{r}_{pq^2rv^2} \right] \right\}. \quad (5.25)$$

O astfel de metodă de integrare este, bineînțeles, foarte costisitoare în ceea ce privește timpul CPU dacă n nu este bine adaptat în funcție de distanța între suprafețele pe care se integrează. Pentru o eroare de calcul impusă mai mică decât ε , trebuie să alegem n :

$$n \geq \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\rho_M}{\rho_G}} \right\rceil \quad (5.26)$$

unde ρ_M este distanța maximă în interiorul unei fețe și ρ_G este distanța între două fețe.

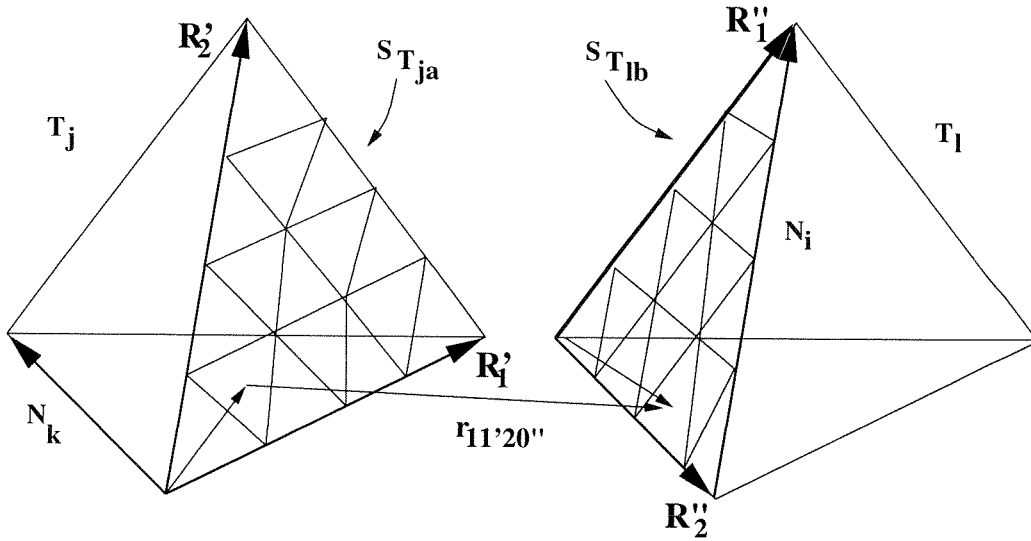


Fig. 5.6: Discretizarea a două fețe din două tetraedre diferite; fețele pot fi și identice în tetraedre identice; în funcție de poziția suprafețelor se stabilește și norma discretizării

Folosind o formulă de cuadratură Gauss pentru triunghiuri (vezi [97], [82]), integrala din (5.25) se poate calcula:

$$I_{jalb} = \int_{\partial T_{ja}} \int_{\partial T_{lb}} r dA dA = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} w_{ja}^p w_{lb}^q \quad (5.27)$$

unde w_{ja}^p și w_{lb}^q sunt ponderile calculate în punctele p și q ale fețelor ∂T_{ja} și ∂T_{lb} . Timpul de calcul se reduce semnificativ.

În cazul în care suprafețele sunt identice, se poate utiliza formula (5.25) cu un n mare ($n = 6$) sau formula de cuadratură Gauss cu ponderi și puncte de integrare diferite pentru cele două suprafețe. Rezultatul este astfel obținut cu o precizie mai bună.

O soluție acceptabilă este să se calculeze integrala ca o integrală dublă de volum astfel: se calculează integrala

$$I_l = \int_{T_l} \frac{1}{r} dv \quad (5.28)$$

cu formulele propuse de Urankar [94] și se integrează cu Gauss acest rezultat astfel:

$$I_{jl} = \sum_{p=1}^m I_l \cdot w_{jp} \quad (5.29)$$

unde w_{jp} este ponderea calculată în punctul Gauss p din tetraedrul T_j .

În cazul în care distanța între tetraedre este mai mare, termenul I_{jl} se calculează ca o integrală dublă de volum. Se poate folosi o formulă de tipul (5.25), dezvoltată pentru integrale de volum în loc de integrale de suprafață. Ordinul optim al discretizării se stabilește, ca în [51], astfel:

$$n \geq \left[\sqrt{\frac{2 \rho_M}{\varepsilon \rho_G}} \right] \quad (5.30)$$

Folosind o formulă de cuadratură gaussiană pentru tetraedre (vezi [51], [5], [44]):

$$I_{jl} = \int_{T_j} \int_{T_l} \frac{1}{r} dv dv = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \frac{1}{r_{jp lq}} w_{jp} w_{lq} \quad (5.31)$$

unde w_{jp} și w_{lq} sunt ponderile calculate în punctele p și q ale tetraedrelor T_j și T_l .

Pentru a obține un rezultat optim, din punct de vedere al preciziei și a timpului de calcul, se calculează astfel: se folosește formula (5.25) pentru integrarea suprafață pe suprafață, pentru suprafețe identice; se folosește cuadratura gaussiană pentru suprafețe, pentru suprafețe distincte ale aceluiași tetraedru sau ale tetraedrelor apropiate; se folosește cuadratura gaussiană pentru tetraedre, cu număr de puncte tot mai mic, pentru tetraedre tot mai depărtate; de la o anumită distanță, se poate calcula integrala dublă ca produsul volumelor înmulțit cu funcția de sub integrale. Alegerea metodei de integrare potrivite se face cu ajutorul formulelor (5.26) și (5.30) și prin compararea rezultatelor cu rezultatele folosind formula analitică prezentată în [94].

Termenul I_{jl} se recalculează la fiecare pas de timp pentru tetraedre j și l situate în corpuri diferite, acelea pentru care nucleul $1/r$ se modifică în timp. Matricea $\{L\}$ este plină, recalcularea unora din termenii ei la fiecare pas de timp constituind principalul efort de calcul.

Dacă, de exemplu, avem două corpuri conductoare, matricea $\{L\}$ poate să fie scrisă, separând blocurile referitoare la corpurile 1 și 2:

$$\{L\} = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

unde blocul $[L_{11}] = [L_{21}]^T$ trebuie recalculat la fiecare pas de timp, blocurile diagonale fiind calculate doar o singură dată.

5.2.4 Calculul termenului U_k

Termenii U_k sunt calculați la fiecare pas de timp. Se utilizează o procedură numerică de calcul pentru calculul câmpului impus folosind quadratura Gauss pentru integrarea pe tetraedre și o diviziune a domeniului curenților sursă pentru integrarea pe acest domeniu.

$$U_k = -\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{T}_j \supset k} \mathbf{b}_{\mathbf{kj}} \int_{\mathbf{T}_j} \mathbf{A}_0 dv = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{T}_j \supset k} \mathbf{b}_{\mathbf{kj}} \int_{\mathbf{T}_j} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv \quad (5.33)$$

unde $\mathbf{b}_{\mathbf{kj}} = \text{rot} \mathbf{N}_{\mathbf{k}}$ în tetraedrul \mathbf{T}_j care conține muchia k .

Integrala dublă (pe tetraedrul \mathbf{T}_j și pe domeniul surselor) se calculează ca:

$$I_{j0} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{T}_j} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv = \frac{d}{dt} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{\mathbf{J}_0}{r_{jp0q}} w_{jp} w_{0q} \quad (5.34)$$

unde w_{jp} și w_{0q} sunt ponderile calculate în punctele p și q ale tetraedrului \mathbf{T}_j și al domeniului cu surse filiforme (care pot modela spire supraconductoare).

În integrala (5.33), sursele pot fi și bobine masive, care se modelează numeric prin divizarea în subdomenii hexaedrale. Integrala (5.34) se poate scrie atunci ca:

$$I_{j0} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{T}_j} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv = \frac{d}{dt} \sum_{l=1}^{n_0} \int_{\mathbf{T}_j} \int_{H_l} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv = \quad (5.35)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{l=1}^{n_0} \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^{n_{H^l}} \frac{\mathbf{J}_0}{r_{jp0q}} w_{jp} w_{H^l q}$$

unde w_{jp} și $w_{H^l q}$ sunt ponderile calculate în punctele p și q ale tetraedrului \mathbf{T}_j și al hexaedrului H_l din domeniul cu surse.

Capitolul 6

Ecuatia curenților turbionari în medii neliniare magnetic, în mișcare

6.1 Tratarea neliniarității

Metoda utilizată este prezentată în lucrările lui Hăntîlă [47], Albanese, Hăntîlă, Rubinacci [7], [8], [9], [10] și este folosită, pentru a menționa numai câteva lucrări recente, de Chiampi [30], Esposito, Musolino ș.a. [37], [38]. Prezentăm în cele ce urmează pe scurt această metodă.

Fie Ω_F domeniul corpurilor feromagnetice. Fie L și L_α spațiile Hilbert pe care definim produsele vectoriale

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^t \int_{\Omega_F} \mathbf{u} \mathbf{v} \, dv \, d\tau$$

și respectiv

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\alpha = \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle,$$

unde $\alpha > 0$.

Relația constitutivă pentru mărimile magnetice este:

$$\mathbf{H} = F(\mathbf{B}) \tag{6.1}$$

unde F este o funcție Lipschitziană:

$$\|F(\mathbf{B}_1) - F(\mathbf{B}_2)\| \leq \Lambda \|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|, \quad \forall \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \tag{6.2}$$

și uniform monotonă:

$$\langle F(\mathbf{B}_1) - F(\mathbf{B}_2), \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 \rangle \geq \lambda \|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|^2, \quad \forall \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \tag{6.3}$$

Presupunem că în aproape fiecare punct P al domeniului Ω_F avem o relație locală $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Lipschitziană și uniform monotonă. Dacă constanta locală Λ_P este mărginită

superior și constanta locală λ_P este mărginită inferior, atunci relația constitutivă F este Lipschitziană și uniform monotonă.

Înlocuim relația constitutivă F cu:

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (6.4)$$

în care:

$$\mathbf{M} = \nu \mathbf{B} - F(\mathbf{B}) = G(\mathbf{B}) \quad (6.5)$$

Dacă $\nu = 1/\mu$ este o constantă potrivit aleasă, atunci funcția G este o contracție:

$$\|G(\mathbf{B}_1) - G(\mathbf{B}_2)\|_\mu \leq \Theta \|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|_\nu, \quad \forall \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \quad (6.6)$$

unde $\Theta < 1$. De exemplu, putem să luăm $\mu \in (0, 2\lambda/\Lambda^2)$. Dacă mediile feromagnetice sunt izotrope atunci în fiecare punct P putem lua $\mu < 2\mu_m$ și constanta de contracție este $\Theta = \max(1 - \mu/\mu_M, \mu/\mu_m - 1)$. Se poate observa că pentru $\mu = \mu_0$, avem $\Theta = 1 - \mu_0/\mu_M$. De aceea putem să înlocuim spațiul domeniilor feromagnetice cu un mediu liniar având permeabilitatea care să asigure convergența funcției $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{M}$. Pentru $\mu > \mu_M/2$ această condiție este asigurată și se arată în [8] că alegând $\mu = \mu_0$ condiția este îndeplinită.

Procedura iterativă pentru tratamentul neliniarității constă în doi pași. Pornind cu un $\mathbf{M}^{(0)}$ arbitrar ales, avem:

(P.1) Pentru o magnetizație dată $\mathbf{M}^{(k-1)}$, calculăm câmpul cvasistaționar definit de ecuațiile:

$$rot \mathbf{E}^{(k)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(k)}}{\partial t}, \quad (6.7)$$

$$rot \mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{J}^{(k)}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{J}^{(k)} = \sigma \mathbf{E}^{(k)} + \mathbf{J}_0, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mu_0 (\mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{M}^{(k-1)}); \quad (6.10)$$

(P.2) Corectăm magnetizația \mathbf{M} , folosind funcția G :

$$\mathbf{M}^{(k)} = G(\mathbf{B}^{(k)}) \quad (6.11)$$

Dacă se îndeplinește condiția de convergență, adică:

$$\varepsilon^{(k)} = \|\mathbf{M}^{(k)} - \mathbf{M}^{(k-1)}\|_\mu \quad (6.12)$$

este destul de mică, oprim iterațiile.

Funcția $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{B} = W(\mathbf{M})$, definită ca soluția ecuațiilor (6.7) \dots (6.10) este nonexpansivă:

$$\|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|_\nu = \|W(\mathbf{B}_1) - W(\mathbf{B}_2)\|_\mu \leq \|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\|_\mu \quad (6.13)$$

Procedura iterativă conduce la un punct fix \mathbf{M} al contracției $G \circ W : L_\mu \rightarrow L_\mu$. \mathbf{M} dă soluția exactă a problemei neliniare. Într-adevăr, dacă $\mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{M}^{(k-1)}$, atunci din relațiile (5.13) și (6.11) avem $\mathbf{H} = F(\mathbf{B})$. Convergența liniară a procedurii de tip Picard-Banach conduce la următoarele estimări ale erorii, referitor la iterația k :

- în comparație cu soluția exactă:

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}^{(k)}\|_\nu \leq \frac{\varepsilon^{(k)}}{1 - \Theta}$$

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}^{(k)}\|_\mu \leq \frac{\varepsilon^{(k)}}{1 - \Theta}$$

- în relația constitutivă:

$$\|\mathbf{H}^{(k)} - F(\mathbf{B}^{(k)})\|_\mu \leq \varepsilon^{(k)}$$

6.2 Ecuatia integrală a curenților turbionari pentru medii neliniare - formularea în potențial vector \mathbf{T}

În tratarea neliniarității se consideră mediul omogen magnetic (cu permeabilitate egală cu cea a vidului). Putem deci extinde metoda integrală descrisă în Capitolul 5 pentru medii neliniare. Se adaugă în ecuația integrală a densității de curent \mathbf{J} termenul datorat magnetizației \mathbf{M} :

$$\rho\mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{J}}{r} dv + gradV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (6.14)$$

unde

- Ω_C este domeniul mediilor conductoare;
- Ω_0 este domeniul surselor, constituit din bobine supraconductoare;
- Ω_F este domeniul mediilor feromagnetice.

Domeniul conductor poate să fie identic cu cel feromagnetic, poate să includă pe acesta sau poate să aibă subdomenii comune cu domeniul feromagnetic. Părți din domeniile feromagnetice și din domeniile conductoare pot să fie în mișcare.

Pentru domeniul Ω_C conductor se folosește o discretizare în elemente tetraedrale (vezi Capitolul 5). Pentru domeniul feromagnetic putem folosi aceeași discretizare sau putem folosi o discretizare diferită. Considerăm domeniul feromagnetic divizat în n_F subdomenii hexaedrale ω_p

Introducem, la fel ca în Capitolul 5, potențialul electric vector ca necunoscută. Pe frontieră avem condiția $\mathbf{n}\mathbf{J} = \mathbf{n}rot\mathbf{T} = 0$. Cu \mathbf{N}_k , $k = 1, \dots, n$ notăm funcțiile având $rot\mathbf{N}_k$ liniar independente. Proiectând ecuația (6.14) pe funcțiile de formă și pondere $rot\mathbf{N}_k$ și integrând pe domeniul conductor, obținem:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_C} rot\mathbf{T}rot\mathbf{N}_k dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} \int_{\Omega_C} \frac{1}{r} rot\mathbf{N}_k rot\mathbf{T} dv dv = \\ & -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k \int_{\Omega_F} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dv dv \end{aligned} \quad (6.15)$$

Se obține deci sistemul de ecuații diferențiale:

$$\{R\}[\alpha] + \frac{d}{dt} (\{L\}[\alpha]) = [U] + [V] \quad (6.16)$$

unde termenii $\{R\}$, $\{L\}$, $[\alpha]$, $[U]$ se calculează la fel ca și în Capitolul 5 iar termenul liber V_k este:

$$V_k = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_C} \text{rot} \mathbf{N}_k \int_{\Omega_F} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dv dv \quad (6.17)$$

6.2.1 Corecția iterativă a magnetizației

Considerând \mathbf{M} constant în fiecare element ω_P al domeniului feromagnetic Ω_F , termenul V_k se mai poate scrie:

$$V_k = \frac{d}{dt} \sum_{p=1}^{n_F} \mathbf{a}_{kp} \mathbf{M}_p \quad (6.18)$$

cu

$$\mathbf{a}_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} \text{rot} \mathbf{N}_k \times \int_{\omega_P} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv \quad (6.19)$$

Pentru corecția magnetizației \mathbf{M} conform relației (6.5), trebuie recalculată inducția \mathbf{B} . În fiecare subdomeniu ω_i al domeniului feromagnetic putem calcula valoarea medie a inducției \mathbf{B} :

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \frac{1}{v_i} \oint_{\partial\omega_i} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS_i \quad (6.20)$$

în care \mathbf{A} este calculat cu formula Biot-Savart-Laplace. Se obține, considerând \mathbf{M} constant în fiecare subdomeniu ω_i de volum v_i :

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \frac{1}{v_i} \sum_{k=1}^{n_C} \beta_{ik} \times \mathbf{J}_k - \frac{1}{v_i} \sum_{k=1}^{n_F} \bar{\gamma}_{ip} \mathbf{M}_p + \mathbf{B}_0 \quad (6.21)$$

unde:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{v_i} \oint_{\partial\omega_i} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0) dS_i \quad (6.22)$$

și:

$$\beta_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\omega_i} \int_{\omega_k} \frac{\mathbf{n}_i}{r} dv_k dS_i \quad (6.23)$$

unde cu ω_k am notat subdomeniul tetraedral al mediilor conductoare. Tensorul $\bar{\gamma}_{ip}$ este:

$$\bar{\gamma}_{ip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\omega_i} \oint_{\omega_p} \frac{\mathbf{n}_p; \mathbf{n}_i - (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_i)}{r} dS_p dS_i \quad (6.24)$$

În ecuația anterioară am folosit notația ; pentru produsul diadic.

Pentru o parte din termenii $\bar{\gamma}_{ip}$, β_{ik} și \mathbf{a}_{kp} nucleul $1/r$ sau $1/r^3$ este variabil în timp (când integrarea se face pe subdomenii sau suprafețe ale subdomeniilor din corpuri ce se deplasează cu viteze diferite).

6.3 Ecuatia integrală a curenților turbionari pentru medii neliniare - formularea în Tintegral

Pornim de la legea lui Faraday, scrisă într-o formă integrală, în sistemele de coordonate atașate corpurilor conductoare în mișcare:

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{A} + gradV) \quad (6.25)$$

unde am notat cu \mathbf{E} integrala în timp a intensității câmpului electric \mathbf{E} , sau potențialul magnetic vector modificat:

$$\mathbf{E} = \int_0^t \mathbf{E}(\tau) d\tau$$

Formula Biot-Savart-Laplace ne dă potențialul vector:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega_C} \frac{\mathbf{J}}{r} dv + \mathbf{A}_0 \quad (6.26)$$

unde \mathbf{A}_0 este potențialul vector produs de densitatea de curent impusă \mathbf{J}_0 , Ω_C e domeniul curenților turbionari.

Din relațiile (6.25) și (6.26) obținem ecuația curenților turbionari:

$$\rho\mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{J}}{r} dv + gradV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_F} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (6.27)$$

unde am notat cu \mathbf{J} integrala în timp a lui \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{J}(\tau) d\tau.$$

Potențialul vector al acestei mărimi este \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \int_0^t \mathbf{T}(\tau) d\tau.$$

Folosind condiția de etalonare topologică, metoda Galerkin, elemente de muchie asociate circulațiilor lui \mathbf{T} de-a lungul corzilor coarboarelui interior în rețeaua tetraedrală dezvoltată în mediile conductoare (ca în Capitolul 5, obținem derivata în timp a ecuației (6.15):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_C} rot\mathbf{T}rot\mathbf{N}_k dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} \int_{\Omega_C} \frac{1}{r} rot\mathbf{N}_k rot\mathbf{T} dv dv = \\ & -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv - \int_{\Omega_C} rot\mathbf{N}_k \int_{\Omega_F} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dv dv \end{aligned} \quad (6.28)$$

și deci avem sistemul de ecuații:

$$\{R\}[\alpha] + \{L\}[\alpha] = [U] + [V] \quad (6.29)$$

unde α_k , R_{ik} , L_{ik} și \mathbf{a}_{kp} au aceeași formă ca în (5.10), (5.13), (5.14) și (6.19) iar:

$$\alpha_k(t) = \int_0^t \alpha_k(\tau) d\tau \quad (6.30)$$

și unde:

$$U_k = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} rot \mathbf{N}_k \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv \quad (6.31)$$

$$V_k = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} rot \mathbf{N}_k \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r} dv dv = \sum_{p=1}^{n_F} \mathbf{a}_{kp} \mathbf{M}_p \quad (6.32)$$

6.3.1 Corecția magnetizației

Nu intervin modificări în procedura de calcul a magnetizației \mathbf{M} , respectiv a inducției \mathbf{B} , pentru iterațiile neliniare. Considerând $\mathbf{B}(t) = 0$ pentru $t = 0$ și o variație de tip rampă a câmpului sursă, cu această metodă se consideră \mathbf{B} constant în fiecare interval de timp Δt . Variația lui \mathbf{B} de la un interval Δt la altul se face în mici trepte. În formularea anterioară, consideram că \mathbf{B} variază liniar pe fiecare interval de timp Δt . dar pentru o variație liniară a lui \mathbf{B} , \mathbf{M} nu variază liniar. Considerând inducția \mathbf{B} constantă pe un interval de timp Δt , valoarea magnetizației \mathbf{M} este bine calculată în funcție de inducția \mathbf{B} .

6.4 Calculul termenilor sistemului

6.4.1 Calculul termenilor V_k , \mathbf{a}_{kp} , și β_{ip}

Termenii V_k se recalculează la fiecare pas de timp și pentru fiecare iterație neliniară deoarece \mathbf{a}_{kp} se modifică la fiecare pas de timp iar \mathbf{M}_p se modifică la fiecare iterație neliniară, fiind corectată în funcție de \mathbf{B} . Se calculează deci \mathbf{a}_{kp} la fiecare pas de timp astfel:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{kp} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} rot \mathbf{N}_k \times \int_{\omega_P} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{T_j \supset k} \mathbf{b}_{jk} \times \int_{T_j} \int_{\omega_P} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{T_j \supset k} \mathbf{b}_{jk} \times \mathbf{I}_{jp}(x, y, z) \end{aligned} \quad (6.33)$$

unde \mathbf{b}_{jk} este $\text{rot}\mathbf{N}_k$ calculat în tetraedrul T_j . Integrala $\mathbf{I}_{jp}(x, y, z)$ se calculează, pentru tetraedre T_j și hexaedre ω_P apropiate transformând-o într-o integrală dublă de suprafață, pe suprafețele tetraedrului, respectiv hexaedrului.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{jp} &= \int_{T_j} \int_{\omega_P} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv = \oint_{\partial T_j} \oint_{\partial \omega_P} \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{n}_j \mathbf{n}_p) dA_j dA_p = \\ &= \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 \left(\int_{ST_{ja}} \int_{ST_{pb}} \frac{\mathbf{r}}{r} dA_{ja} dA_{pb} \mathbf{n}_{ja} \mathbf{n}_{pb} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Integralele de suprafață pot fi tratate ca și la calculul integralelor duble pe tetraedre. Pentru suprafețe identice, se folosesc sume Riemann cu o divizare fină a feței. Singularitatea se elimină fără dificultate, alegând discretizările pe cele două domenii, conductor și feromagnetic în așa fel încât punctele rețelelor lor, tetraedrale și hexaedrale să nu fie identice și nici diviziunile fețelor tetraedrelor respectiv hexaedrelor să nu coincidă, oricât de fine ar fi cele două discretizări.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{japb} &= \int_{ST_{ja}} \int_{S\omega_{pb}} \frac{\mathbf{r}}{r} dA_{ja} dA_{pb} = \\ &= \frac{\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_p}{n^2 m^2} \cdot \sum_{o=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-o-1} \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\mathbf{r}_{oq^1rs}}{r_{oq^1rs}} + \sum_{o=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-o} \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\mathbf{r}_{oq^2rs}}{r_{oq^2rs}} \end{aligned} \quad (6.35)$$

în care n este numărul de diviziuni pentru o față triunghiulară a unui tetraedru, m este numărul de diviziuni pentru o față a unui hexaedru; rezultă n^2 arii elementare triunghiulare pe fiecare față a unui tetraedru, m^2 arii elementare patrulatere pe fiecare față a unui hexaedru. În Figura 6.1 este exemplificată operația de integrare.

O altă variantă de calcul, pentru suprafețele apropiate utilizează o formulă de cuadratură gaussiană pentru triunghiuri și patrulatere [82], [97]:

$$\mathbf{I}_{japb} = \int_{ST_{ja}} \int_{S\omega_{pb}} \frac{\mathbf{r}}{r} dA_{ja} dA_{pb} = \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\mathbf{r}_{qr}}{r_{qr}} w_{ja}^q w_{pb}^r \quad (6.36)$$

unde n și m sunt ordinele cuadraturii pe triunghiuri și patrulatere iar w_{ja}^q și w_{pb}^r sunt ponderile în punctele q și r .

Pentru distanțe mai mari între tetraedre și hexaedre, se folosesc formulele de cuadratură Gauss pentru tetraedre și hexaedre [82], [97]:

$$\mathbf{I}_{jp} = \int_{T_j} \int_{\omega_p} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv = \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\mathbf{r}_{jqpr}}{r_{jqpr}^3} w_{jq}^\Delta w_{pr}^H \quad (6.37)$$

unde w_{jq}^Δ și w_{pr}^H sunt ponderile în punctele q și r ale tetraedrului curent T_j , respectiv hexaedrului curent H_p . Formulele de cuadratură Gauss sunt de ordine n pentru tetraedre, de ordin m pentru hexaedre.

Pentru calculul matricii cu elementele \mathbf{a}_{kp} se calculează mai întâi o matrice ai cărei termeni sunt \mathbf{I}_{jp} . Folosim în continuare următoarele notații:

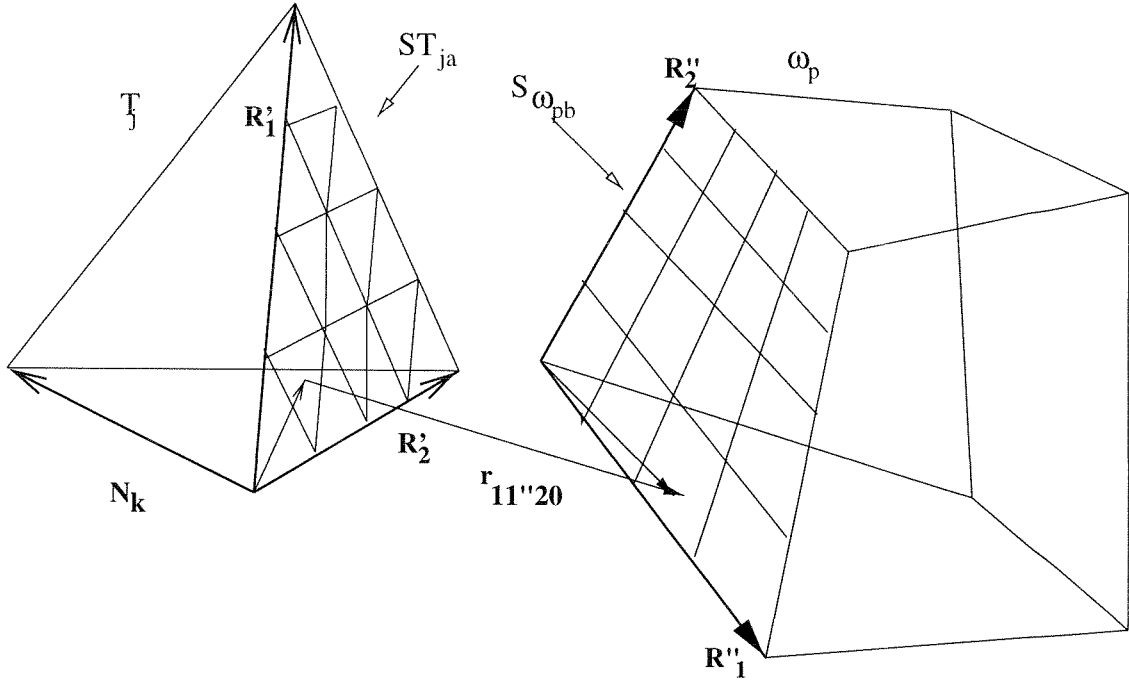


Fig. 6.1: Calculul integralei duble de suprafață prin divizarea regulată a fețelor tetraedrului și a hexaedrului; exemplu pentru calculul unui termen

- {TC} pentru matricea cu elementele $\mathbf{tc}_{jp} = \mathbf{I}_{jp}$, cu $j = 1 \cdots n_C$, $p = 1 \cdots n_F$, unde cu n_C am notat numărul de tetraedre (sau subdomenii ce discretizează spațiul ocupat de conductoare) iar cu n_F am notat numărul de hexaedre (sau subdomenii ce discretizează spațiul ocupat de corpurile feromagnetice);
- {AN} pentru matricea cu elementele \mathbf{a}_{kp} , $k = 1 \cdots n_{ci}$, $p = 1 \cdots n_F$ unde cu n_{ci} am notat numărul de corzi interioare (muchii active);
- {B} pentru matricea cu elementele β_{ip} . Se observă că această matrice este proporțională cu transpusa matricii {TC}:

$$\{B\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \{TC\}^T$$

. Într-adevăr, termenii:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{tc}_{jp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{T_j} \int_{\omega_p} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial T_j} \oint_{\partial \omega_p} \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{n}_j \mathbf{n}_p) dA_j dA_p$$

și

$$\beta_{pj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial T_j} \int_{\omega_p} \frac{\mathbf{n}_j}{r} dA_j dv_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial T_j} \oint_{\partial \omega_p} \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{n}_j \mathbf{n}_p) dA_j dA_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{T_j} \int_{\omega_p} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv dv$$

coincid.

Calculând matricea $\{\mathbf{TC}\}$ nu mai este nevoie să calculăm și matricea $\{B\}$. Aceasta ușurează semnificativ efortul de calcul la fiecare pas de timp.

Matricile $\{\mathbf{TC}\}$, $\{\mathbf{AN}\}$ și $\{\mathbf{B}\}$ au elemente vectori tridimensionali (componentele după cele trei axe de coordonate în sistemul cartezian).

Se calculează în primul pas de timp matricile $\{\mathbf{TC}\}$ și $\{\mathbf{AN}\}$ în întregime și, la următorii pași de timp, din matricea $\{\mathbf{TC}\}$, acei termeni care depind de timp. Doar pentru a fixa ideile, să presupunem că avem două corpuri rigide conductoare și feromagnetice, în mișcare unul față de celălalt. Matricea $\{\mathbf{TC}\}$ poate fi scrisă, separând blocurile referitoare la corpul 1 și la corpul 2:

$$\{TC\} = \begin{bmatrix} [TC_{11}] & [TC_{12}] \\ [TC_{21}] & [TC_{22}] \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

unde blocurile $[TC_{12}]$ și $[TC_{21}]$ trebuie recalculat la fiecare pas de timp, blocurile diagonale fiind calculate doar o dată, la primul pas de timp.

Matricea $\{\mathbf{AN}\}$ cu elementele de forma \mathbf{a}_{kp} se calculează în funcție de $\{\mathbf{TC}\}$.

Cu valorile calculate pentru magnetizația \mathbf{M} la fiecare iterație neliniară, putem calcula termenii vectorului \mathbf{V}_k ale cărui elemente sunt scalari:

$$\{V\} = [\mathbf{AN}][\mathbf{M}] \quad (6.39)$$

6.4.2 Calculul termenilor $\bar{\bar{\gamma}}_{ip}$

Termenul γ_{ip} este un tensor cu componentele:

$$\bar{\bar{\gamma}}_{ip} = \begin{bmatrix} \gamma_{ipxx} & \gamma_{ipxy} & \gamma_{ipxz} \\ \gamma_{ipyx} & \gamma_{ipy y} & \gamma_{ipy z} \\ \gamma_{ipzx} & \gamma_{ipzy} & \gamma_{ipzz} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Matricea $\{\Gamma\}$, cu elementele $\bar{\bar{\gamma}}_{ip}$, $i = 1 \dots n_F$, $p = 1 \dots n_F$, este simetrică și deci poate fi calculată, la primul pas de timp, numai pe jumătate (matricea triangular superioară, de exemplu). La următorii pași de timp, se recalculază termenii dependenți de timp, deci pentru care nucleul $1/r$ este variabil datorită mișcării.

Pentru două corpuri feromagnetice aflate în mișcare unul față de celălalt, pentru care am grupat termenii corespunzând fiecărui corp, avem:

$$\{\Gamma\} = \begin{bmatrix} [\Gamma_{11}] & [\Gamma_{12}] \\ [\Gamma_{21}] & [\Gamma_{22}] \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

unde blocul $[\Gamma_{12}]$ se obține prin transpunerea lui $[\Gamma_{21}]$ și deci unul dintre ele va fi recalculat la fiecare pas de timp. Blocurile diagonale se calculează numai la primul pas de timp.

Termenul $\bar{\gamma}_{ip}$ se poate calcula astfel:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{ip} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\omega_i} \oint_{\omega_p} \frac{\mathbf{n}_p; \mathbf{n}_i - (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_i)}{r} dS_p dS_i = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 (\mathbf{n}_p; \mathbf{n}_i - (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_i)) \int_{S\omega_i} \int_{S\omega_p} \frac{1}{r} dS_{H_{bp}} dS_{H_{ai}}\end{aligned}\quad (6.42)$$

unde

$$\mathbf{n}_p; \mathbf{n}_i - (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_i) = \begin{bmatrix} -n_{py}n_{iy} - n_{pz}n_{iz} & -n_{px}n_{iy} & -n_{px}n_{iz} \\ -n_{py}n_{ix} & -n_{px}n_{ix} - n_{pz}n_{iz} & -n_{py}n_{iz} \\ -n_{pz}n_{ix} & -n_{pz}n_{iy} & -n_{px}n_{ix} - n_{py}n_{iy} \end{bmatrix}\quad (6.43)$$

Integrala dublă de suprafață conținând nucleul $1/r$ se calculează fie folosind o divizare parametrică a fețelor patrulatere curente SH_{bp} și SH_{ai} ale hexaedrelor H_p și H_i , fie utilizând o formulă de quadratura gaussiană. Utilizând prima variantă de calcul, avem formula:

$$I_{aip} = \int_{SH_{ai}} \int_{SH_{bp}} \frac{1}{r} dS_{bp} dS_{ai} = \frac{A_{ai} \cdot A_{bp}}{n^4} \sum_{o=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{r_{oqrs}}\quad (6.44)$$

unde cu A_{ai} și A_{bp} am notat ariile suprafețelor SH_{ai} respectiv SH_{bp} , n este ordinul divizării, r_{oqrs} este distanța între elementul de arie cu indicii oq al feței a a hexaedrului i și elementul de arie cu indicii rs al feței b a hexaedrului p . În Figura 6.2 se exemplifică această integrare.

Singularitatea care apare pentru cazul în care suprafețele de integrare coincid se elimină izolând punctele pentru care $r \rightarrow 0$. Discretizarea este cu atât mai fină cu cât fețele sunt mai apropiate. Pentru fețe care coincid, se elimină punctele de integrare comune, valoarea aproximându-se prin interpolarea valorilor integralei în punctele vecine.

Integrarea folosind formulele de quadratură Gauss de ordin m și n pentru patrulatere [82] se face astfel:

$$I_{aip} = \int_{SH_{ai}} \int_{SH_{bp}} \frac{1}{r} dS_{bp} dS_{ai} = \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{1}{r_{qr}} w_{ai}^q w_{bp}^r\quad (6.45)$$

unde am notat cu w_{ai}^q și cu w_{bp}^r ponderile pentru funcția $1/r$ în punctele q și r ale patrulaterelelor SH_{ai} , respectiv SH_{bp} . Pentru a elimina singularitățile, se folosesc formulele de quadratură pentru cele două suprafețe, când acestea sunt apropiate sau identice, cu număr diferit de puncte $n \neq m$.

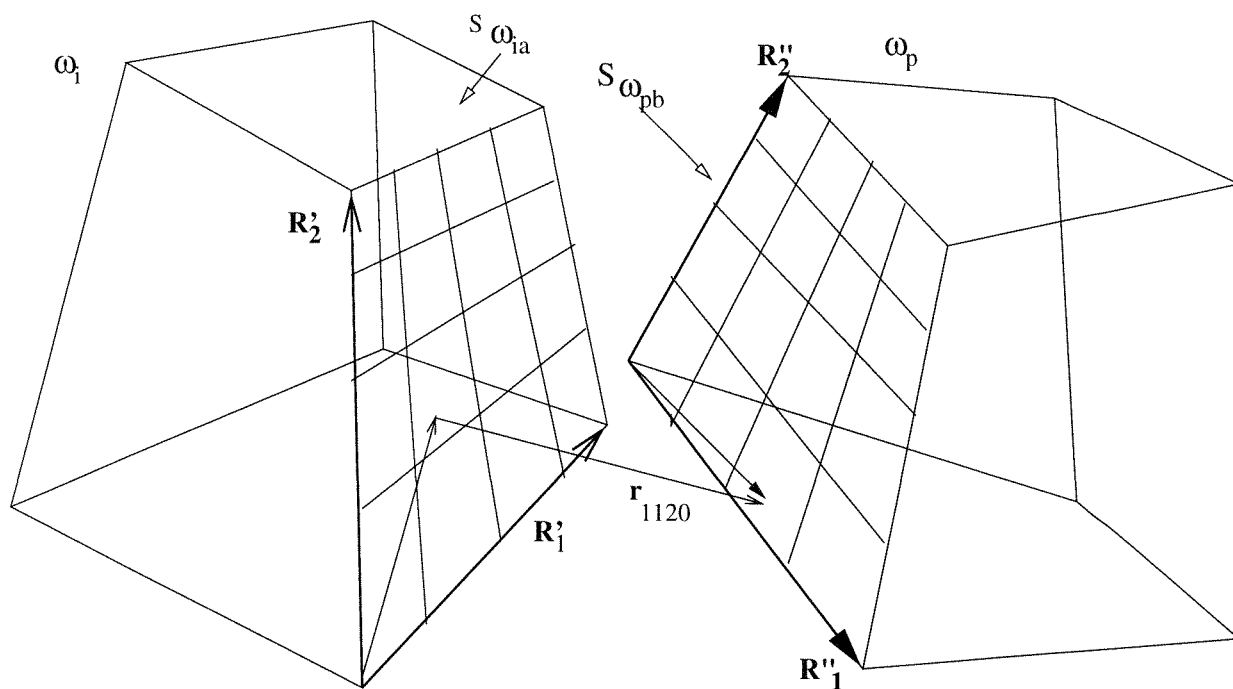


Fig. 6.2: Calculul integralei duble de suprafață cu discretizarea parametrică afețelor hexaedrului

Capitolul 7

Calculul forțelor în regim cuasistaționar

Prezentăm în acest capitol două metode de calcul pentru forțe în regim cuasistaționar, metoda derivării coenergiei și metoda forței nodale; un caz particular al acestora din urmă este și metoda integrării tensorului tensiunilor maxwelliene. În ultima secțiune a acestui capitol este prezentată în extenso procedura de calcul numeric pentru forța ce acționează asupra unui corp folosind integrarea tensorului tensiunilor maxwelliene pe o suprafață definită în jurul unui corp.

7.1 Metoda derivării coenergiei

Scriem formula coenergiei:

$$\Psi = \int \left(\int^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \right) d\Omega = \int p^{(em)} d\Omega \quad (7.1)$$

Utilizând formalismul geometriei diferențiale avem:

$$\delta\mathbf{H} = -\nabla_u (\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{u}) = -H_k \partial_i \delta u_k = -\nabla_u (\mathbf{H} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}) \quad (7.2)$$

Diferențiala coenergiei este:

$$\delta\Psi = \int \left(\int^H \mathbf{B} \delta\mathbf{H} d\Omega + \int^H \mathbf{B} d\mathbf{H} \delta(d\Omega) \right) \quad (7.3)$$

și, ținând seama și de:

$$\delta(d\Omega) = (\nabla_u \cdot \delta\mathbf{u}) d\Omega \quad (7.4)$$

ecuația (7.3) se poate scrie:

$$\delta\Psi = \int \left(-(\mathbf{B} \nabla_u) (\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{u}) + \mathbf{p}^{(em)} (\nabla_u \cdot \delta\mathbf{u}) \right) d\Omega \quad (7.5)$$

Forța este derivata coenergiei magnetice în raport cu parametrul de configurație u . Se poate exprima forța utilizând și formula duală - a energiei. Sub această formă este prezentată de Kameari în [58]

7.2 Forța nodală

Fie domeniul conductor Ω cu frontiera acestuia γ . Folosind formalismul geometriei diferențiale (vezi în lucrarea lui Bossavit [21] și Capitolul 2) se definește forța nodală ca:

$$f_i^\Omega = \partial T_{ik} \quad (7.6)$$

Pe interfața a două medii cu permitivități diferite, unde tensorul tensiunilor maxwelliene T_{ik} e discontinuu, avem:

$$f_i^\Gamma = (T_{ik}|_2 - T_{ik}|_1) n_k \quad (7.7)$$

Tensiunea superficială se poate defini ca:

$$T_{ik} = H_i B_k - \delta_{ik} p^{(em)} \quad (7.8)$$

unde presiunea electromagnetică poate fi definită ca:

$$p^{(em)} = \int \mathbf{B} d\mathbf{H} \quad (7.9)$$

deci ca densitate de coenergie. Lucrul mecanic elementar este:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} f_i^\Omega \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} f_i^\Gamma \delta u d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} (T_{ik}|_2 - T_{ik}|_1) n_k \delta u_i d\Gamma = - \int T_{ik} \partial_k \delta u_i d\Omega \end{aligned} \quad (7.10)$$

Exprimăm deplasarea elementară δu_i în funcție de funcțiile de formă nodale w_n :

$$\delta \mathbf{u}_i = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{w}_{\mathbf{n}} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{n}i} \quad (7.11)$$

Astfel, lucrul mecanic elementar devine:

$$\delta W = \sum_n \left(- \int T_{ik} \partial_k w_n d\Omega \right) \delta u_{in} = \sum f_{ni} \delta u_{ni} \quad (7.12)$$

Expresia forței nodale obținute este:

$$f_{ni} = - \int T_{ik} \partial_k w_n d\Omega \quad (7.13)$$

Diferențierea se face pornind de la nod; se diferențiază pe tetraedrele ce înconjoară nodul. Astfel se obține lucrul virtual care apare pentru deplasarea acestui nod deci rezultă forța

locală. Calculul forțelor nodale este util mai ales în probleme care corpurile nu sunt rigide (probleme de vibrații, fluide în mișcare) dar poate fi ușor utilizat și în probleme în care apar corpuri rigide în mișcare. Pentru a obține forța totală ce acționează asupra unui rigid se sumează contribuțiile tuturor forțelor nodale. Sub această formă, metoda este prezentată de Kameari [61] [58]. Metoda de calcul a forței prin integrarea tensorului tensiunilor maxwelliene pe o suprafața închisă Σ ce înglobează corpul se poate obține din ecuația (7.10) înlocuind vectorul δu cu vectorul unitate în fiecare direcție în interiorul suprafeței Σ și cu 0 în exteriorul ei.

7.3 Metoda tensorului tensiunilor maxwelliene

O dificultate ce apare în aplicații în care se integrează tensorul tensiunilor maxwelliene este definirea suprafeței de integrare, în exteriorul corpului asupra căruia se exercită forța [33]. Am înglobat în modulul de preprocesare al pachetului de programe pe care l-am dezvoltat o procedură ce extrage suprafețele orientate în exteriorul corpului ale subdomeniilor tetraedrale care discretizează corpurile conductoare. O procedură simplă ne permite să expandăm aceste suprafețe, asamblând astfel o suprafața de integrare pentru tensorul tensiunilor maxwelliene, prin aer.

Fie un corp rigid Ω_{ck} , având frontiera $\partial\Omega_{ck}$, într-o structură conținând corpuri conductoare, feromagnetice și înfășurări filiforme. Putem considera și înfășurări bobinate modelate ca bobine masive dar în care nu se induc curenți. Corpurile se pot deplasa cu viteze diferite unul față de celălalt. Fie o suprafața Σ ce îmbracă domeniul Ω_{ck} , mișcându-se odată cu acesta. Dacă fixăm un sistem de referință legat de corpul Ω_{ck} , în acest sistem de referință suprafața Σ este imobilă. Forța totală se calculează cu formula:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\Sigma} \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{n} \frac{B^2}{2} \right] dA \quad (7.14)$$

unde inducția câmpului magnetic într-un punct pe suprafața de integrare Σ se calculează cu:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}}{R^3} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_f} \frac{(\text{rot}\mathbf{M}) \times \mathbf{R}}{R^3} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}}{R^3} dv + \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (7.15)$$

unde se notează cu Ω_c reuniunea domeniilor conductoare, cu Ω_f reuniunea domeniilor feromagnetice, cu Ω_0 domeniile masive cu surse și cu Γ_k bobinele filiforme.

În Figura 7.1 este schematizată procedura de calcul a inducției magnetice în fiecare punct al suprafeței de integrare și integrarea numerică în care contribuțiile curenților turbionari în subdomeniile conductoare, ale magnetizațiilor, în subdomeniile cu magnetizație, ale curenților impuși, în înfășurările filamentare și ale densităților de curent impus în bobinele masive -surse sunt evidențiate.

$$\left(\sum_{k=1}^{n_c} \mathbf{J}_k \times \mathbf{K}_{kj} + \sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{M}_k \cdot \bar{\bar{\mathbf{N}}}_{kj} + \mathbf{O}_j \right) - \frac{\mathbf{n}_j}{2} \left(\sum_{k=1}^{n_c} \mathbf{J}_k \times \mathbf{K}_{kj} + \sum_{k=1}^{n_F} \mathbf{M}_k \cdot \bar{\bar{\mathbf{N}}}_{kj} + \mathbf{O}_j \right)^2 \Big] dA_j$$

unde am notat cu:

$$\mathbf{K}_{kj} = \oint_{\partial\omega_k} \frac{\mathbf{n}_k}{R} dA, \quad (7.19)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{N}}}_{kj} = \oint_{\partial\omega_k} \frac{(\mathbf{R}; \mathbf{n}) - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})}{R^3} dA \quad (7.20)$$

și

$$\mathbf{O}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0 \times \mathbf{R}}{R^3} dv + \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mu_0 i_k}{4\pi} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (7.21)$$

Aceste integrale se pot calcula folosind atât formule analitice [94] cât și prin cuadratură Gauss pentru volume și suprafețe. Programul de calcul realizat folosește pentru calculul inducției magnetice în fiecare punct al suprafeței Σ și pentru integrarea tensorului tensiunilor maxwelliene calculat pornind de la valoarea lui \mathbf{B} formulele de integrare Gauss pe suprafețe.

Capitolul 8

Rezultate numerice

Rezolvarea sistemului de ecuații

Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale care rezultă din formulările prezentate în Capitolele 5 și 6 am făcut-o utilizând o procedură Crank-Nicholson cu pas de timp constant. Inversarea matricii sistemului se face direct, folosind factorizarea LU pentru cazul în care tratăm și medii neliniare și metoda Gauss pentru cazul fără medii neliniare. În Anexa D prezint pe larg metodele de integrare folosite și succesiunea etapelor de calcul în rezolvarea unei probleme.

Ca aplicație pentru formulările propuse am implementat un pachet de programe în limbajele C și FORTRAN care au putut fi portate ușor pe platforme AIX, HPUX și Linux. Trei variante au fost implementate. Una din variante permite rezolvarea problemelor de curenți turbionari în medii în mișcare, luând în considerare ca surse spire parcurse de curenți și înfășurări modelate ca bobine masive, fără a lua în considerare medii neliniare. O a doua variantă permite rezolvarea problemelor care includ și medii neliniare. În ambele variante este posibil calculul pierderilor prin curenți turbionari și al forțelor. Aceste programe au fost inițial dezvoltate pe o platformă AIX din cadrul Laboratorului "Faraday" din cadrul Catedrei de Electrotehnică din Universitatea Politehnică din București și apoi portate pe una HPUX, în cadrul Laboratorului de Metode Numerice din cadrul Universității Politehnică din București. A treia variantă a pachetului de programe este o aplicație paralelă, implementată în C și dezvoltată utilizând platforma MPI (Message Passing Interface) și permite doar calculul curenților turbionari fără a lua în considerare medii neliniare și calculul forțelor. Programul paralel a fost dezvoltat inițial în cadrul Centrului de Cercetare al Profesorului Rubinacci, la Facultatea de Inginerie din cadrul Universității din Cassino, pe o platformă AIX și testat pe o rețea de 6 calculatoare uniprocessor. Ulterior, programul a fost portat pe o platformă Linux, pe o rețea cu 4 calculatoare, în cadrul Laboratorului "Faraday". Pachetele de programe dezvoltate interacționează cu preprocesorul unui program profesional MSC-EMAS, disponibil în cadrul Laboratorului de Metode Numerice. Rezultatele sunt apoi transmise unui postprocesor propriu pachetului de programe sau postprocesorului MSC-EMAS pentru vizualizarea rezultatelor. În Anexa E prezint pe scurt structura funcțională a pachetelor

de programe dezvoltate. În Anexa F sunt prezentate câteva rezultate și observații legate de aplicația paralelă implementată.

În secțiunile următoare prezint câteva din rezultatele obținute pentru probleme de curenți turbionari în medii în mișcare.

8.1 Exemplul 1: O spiră dreptunghiulară străbătută de curent constant în mișcare cu viteză impusă constantă deasupra unei plăci subțiri conductoare

O primă problemă pentru verificarea formulării propuse pentru medii conductoare este aceea a unei spire conductoare în mișcare deasupra unei plăci dreptunghiulare conductoare și ne-feromagnetice. Dimensiunile plăcii sunt $3.5 \text{ m} \times 1.7 \text{ m}$, în planul x-y având grosimea de 0.01 m . Placa este realizată dintr-un aliaj de aluminiu și are rezistivitatea de $5.95 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Spira în mișcare este dreptunghiulară, este plasată în planul x-y la 0.01 m deasupra conductorului și se mișcă în direcția x. În poziția inițială spira este așezată la o extremitate a plăcii, complet deasupra acesteia apoi evoluează deasupra plăcii și iese complet de deasupra plăcii. Dimensiunile spirei sunt $1 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ și având secțiunea $0.01 \text{ m} \times 0.01 \text{ m}$ astfel încât poate fi considerată filamentară în modelul analitic. Curentul care străbate spira este de $7 \times 10^5 \text{ A}$. Spira se deplasează cu viteză impusă. Problema este prezentată de Kameari și Niikura în [60] de unde am preluat rezultatele analitice.

Placa este discretizată cu 1296 noduri, 2975 tetraedre, 5564 de laturi și 1682 de laturi active.

Pasul de timp a fost ales astfel încât numărul Courant $C < 1$. În Tabelul 8.1 sunt prezentate vitezele pentru care s-au efectuat calculele și pasul de timp corespunzător fiecărei viteze.

Viteza m/s	Pasul de timp s
27.8	0.003
55.6	0.001
83.3	0.001
111.1	0.00075
138.9	0.0005

Tabelul 8.1: Vitezele spirei pentru care s-au făcut calculele și pasul de timp corespunzător

În Figura 8.1 se prezintă distribuția densității de curent a curenților turbionari obținută pentru viteza de 138.9 m/s după 20 de pași de timp. Săgețile indică mărimea și

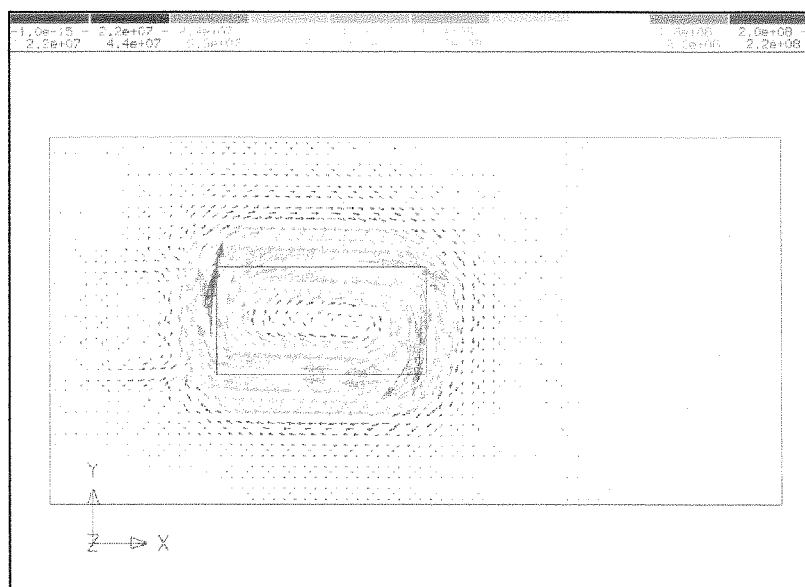


Fig. 8.1: Distribuția curenților turbionari pentru viteza de 138.9 m/s după 20 de pași de timp direcția vectorului densitate de curent în centrul de greutate al fiecărui element tetraedral.

În Figura 8.2 sunt prezentate pierderile prin curenți turbionari totale obținute pentru aceeași viteză de 138.9 m/s în funcție de timp. Se calculează o valoare medie a pierderilor pe porțiunea în care acestea sunt aproximativ egale, corespunzător perioadei de timp în care spira se găsește complet deasupra plăcii conductoare.

În Figura 8.3 sunt prezentate pierderile prin curenți turbionari în funcție de viteză, valorile obținute prin metoda integrală folosită comparate cu valorile analitice prezentate în [60]. Rezultatele obținute sunt apropiate de cele analitice, eroarea obținută datorându-se faptului că în cazul analitic placa se consideră infinit extinsă.

Am calculat forța totală care acționează asupra plăcii în ansamblul placă-spiră. Datorită simetriei, forța în direcția y este neglijabilă. Forța în direcția z are tendința de a ridica spira, îndepărtând-o de placă. În Figura 8.4 e reprezentată dependența forței de ridicare în funcție de viteza spirei, valorile analitice fiind comparate cu cele calculate. Pentru această aplicație vezi [6] [53] și [45]. Din Figură putem vedea că valorile numerice sunt apropiate de cele calculate analitic. Pentru obținerea forței am calculat forța exercitată la câteva momente de timp, pe perioada în care spira este deasupra plăcii, considerând și mai multe suprafețe de integrare. În Figura 8.4 sunt prezentate valorile medii obținute în urma acestor calcule.

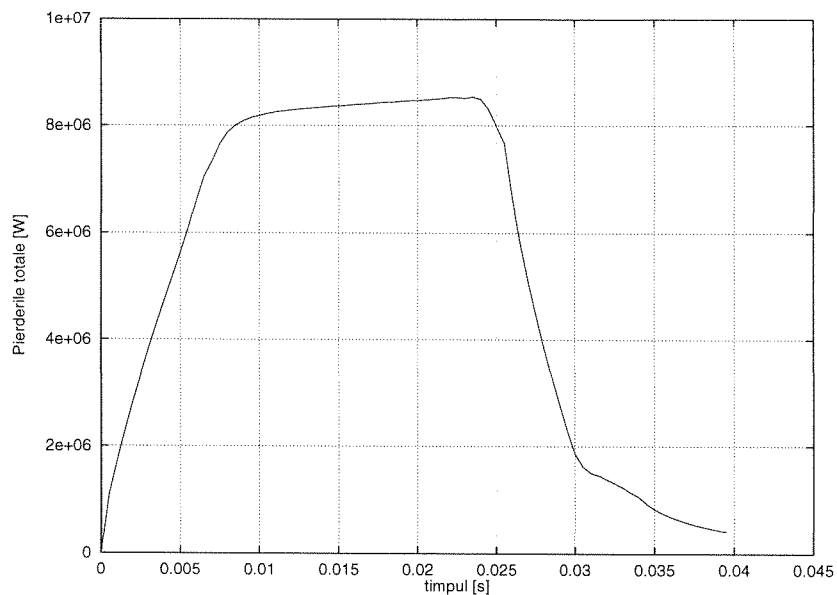


Fig. 8.2: Pierderile totale prin curenți turbionari în placă pentru viteza $v = 138.9$ m/s funcție de timp

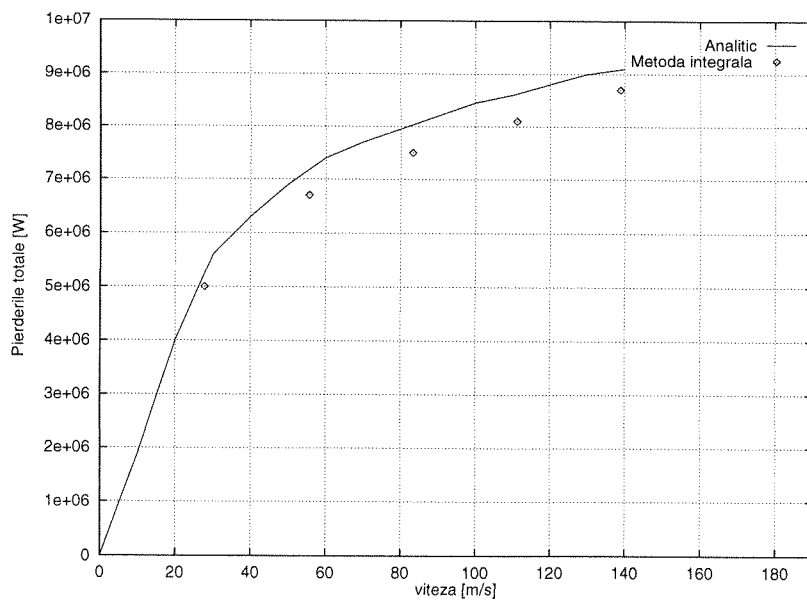


Fig. 8.3: Pierderile totale medii prin curenți turbionari în placă funcție de viteza

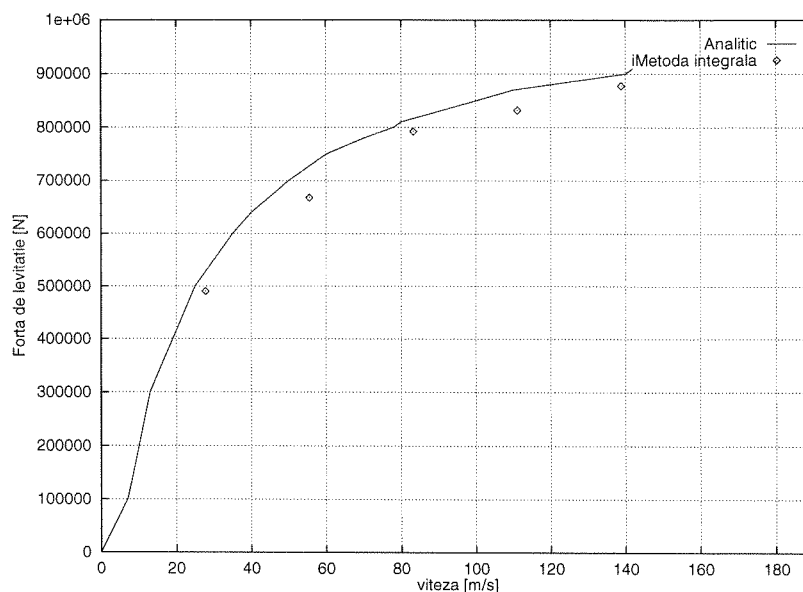


Fig. 8.4: Forța în direcția z asupra spirei funcție de viteză

8.2 Exemplul 2: Două corpuri conductoare în mișcare în preajma unei spire conductoare străbătută de curent impus cu variație rampă

În acest exemplu, se consideră cazul a două corpuri conductoare plasate unul în fața celuilalt, de o parte și de alta a unei spire dreptunghiulare, plasată în planul x-y și străbătută de curent variabil rampă $I = I_0 \cdot t$, cu $I_0 = 10kA$. Corpurile au dimensiunile $1.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$, sunt plasate la distanța de 0.2 m unul de celălalt și au rezistivitatea egală cu 2.0×10^{-8} . Ambele corpuri se mișcă cu viteza de 1 m/s în sensuri opuse, în direcția y. Spira este plasată între cele două corpuri conductoare, la distanță egală, de 0.1 m . Domeniile conductoare sunt discretizate folosind un număr de 1280 tetraedre, 2148 laturi și 898 muchii active. Pasul de timp folosit este de 10 ms . În Figura 8.5 sunt prezentate structurile arborelui și coarborului dezvoltate în cele două plăci conductoare. În Figura 8.6 se prezintă distribuția densității de curent a curenților turbionari în cele două plăci în trei momente diferite de timp. În Figura 8.7 se prezintă harta de culori a distribuției densității de curent pe suprafața conductoarelor pentru $t = 10 \text{ ms}$.

Densitatea de volum a pierderilor prin curenți turbionari pe suprafața conductoarelor este prezentată în Figura 8.8 pentru două momente de timp.

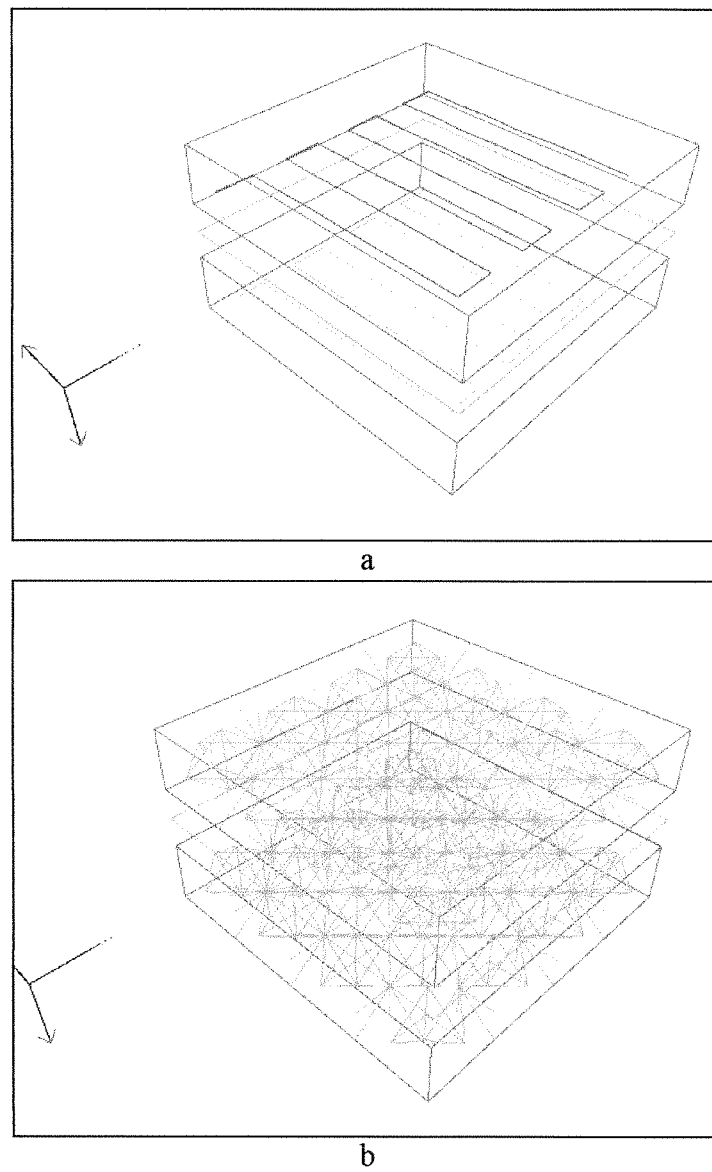


Fig. 8.5: Structura grafului interior: a) arborele (98 laturi) și b) coarborele interior al muchiilor (898 laturi)(Exemplul 2)

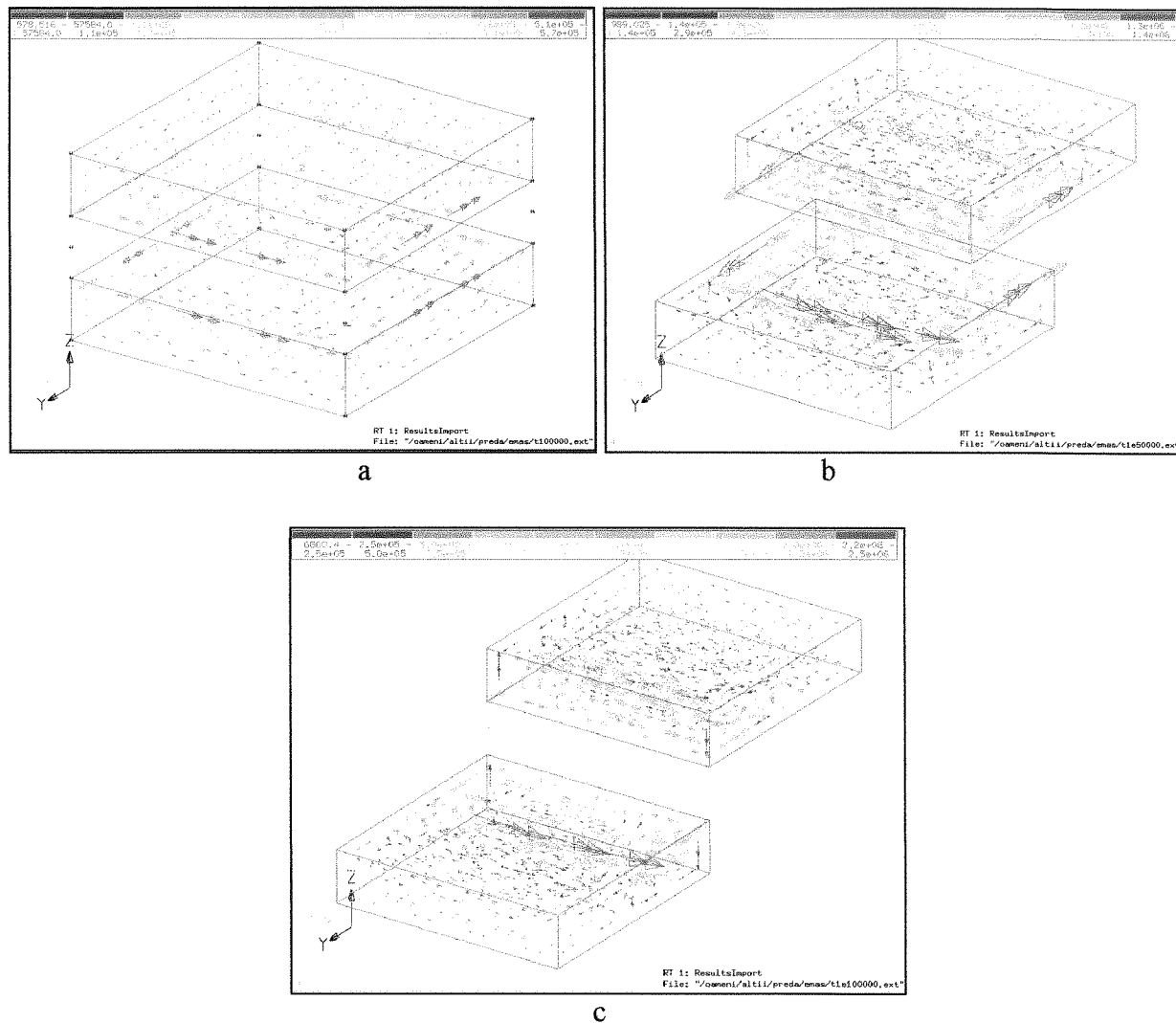


Fig. 8.6: Distribuția curenților turbionari în plăcile conductoare în mișcare cu vitezele $v_1 = 1$ m/s și $v_2 = -1$ m/s la trei momente diferite de timp: a) $t = 10$ ms; b) $t = 250$ ms; c) $t = 500$ ms.

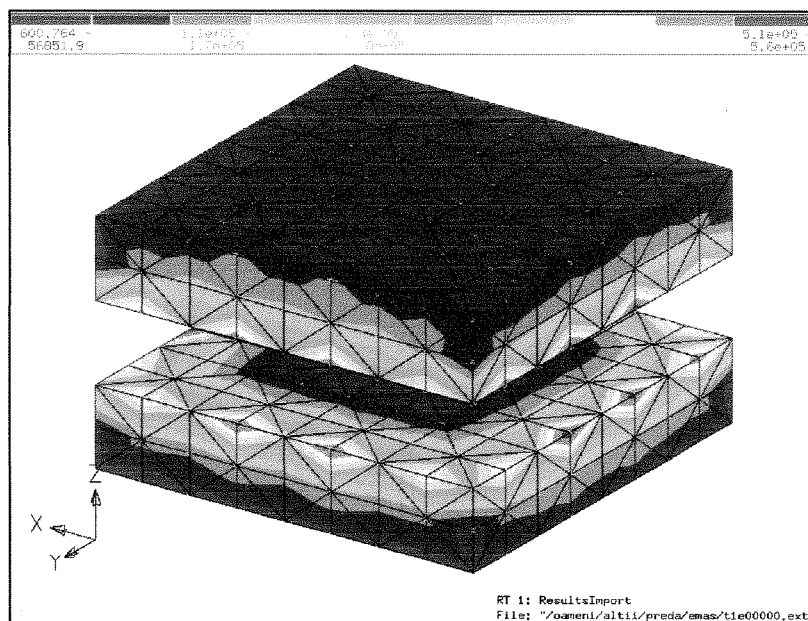
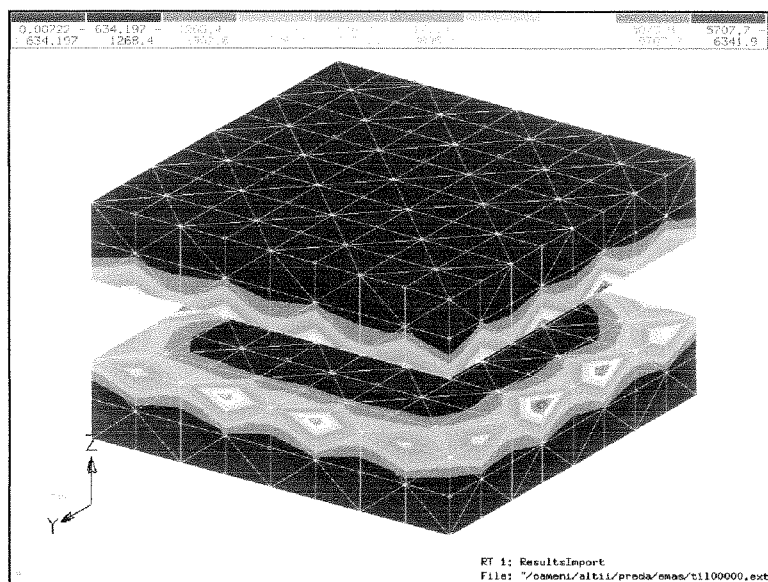


Fig. 8.7: Harta de culori a distribuției densității de curent pe suprafața conductoarelor pentru $t = 10$ ms.

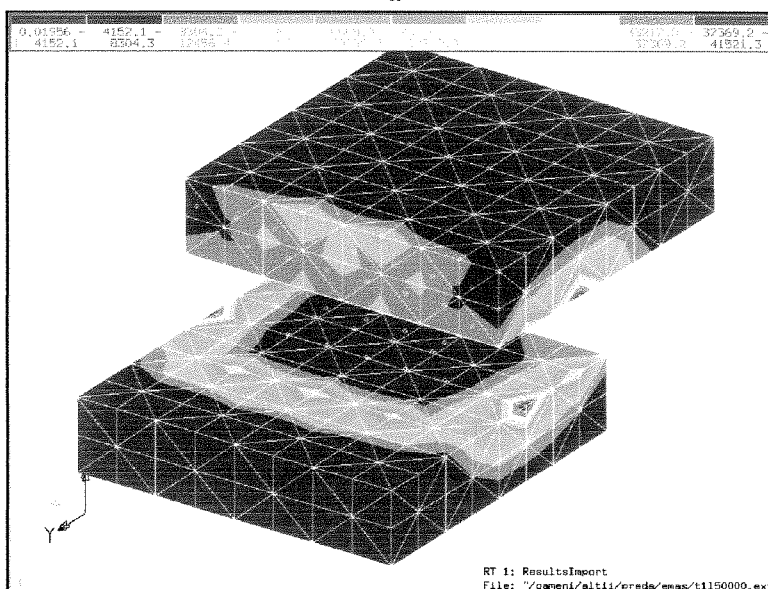
8.3 Exemplul 3: Un corp conductor în mișcare cu viteză impusă deasupra unui ansamblu format dintr-o spiră și un corp masiv conductor

În această aplicație, un corp conductor se mișcă cu viteză impusă deasupra unui ansamblu format dintr-un alt corp conductor, de forma unui jgheab, în care este plasată o înfășurare filiformă, dreptunghiulară, parcursă de curent variabil rampă. În Figura 8.9 sunt prezentate geometria și discretizarea problemei, cu arborele și respectiv coarboarele interior.

În Figura 8.10 se reprezintă distribuția curenților turbionari în cele două corpuri conductoare, la trei momente de timp diferite. Densitatea de volum a pierderilor prin curenți turbionari pe suprafața corpurilor conductoare este prezentată în Figura 8.11. Pentru această aplicație vezi [5] și [4].



a



b

Fig. 8.8: Harta de culori a distribuției densității de volum a pierderilor prin curenți turbionari pe suprafața conductoarelor pentru două momente de timp: a) $t = 10$ ms; b) $t = 250$ ms.

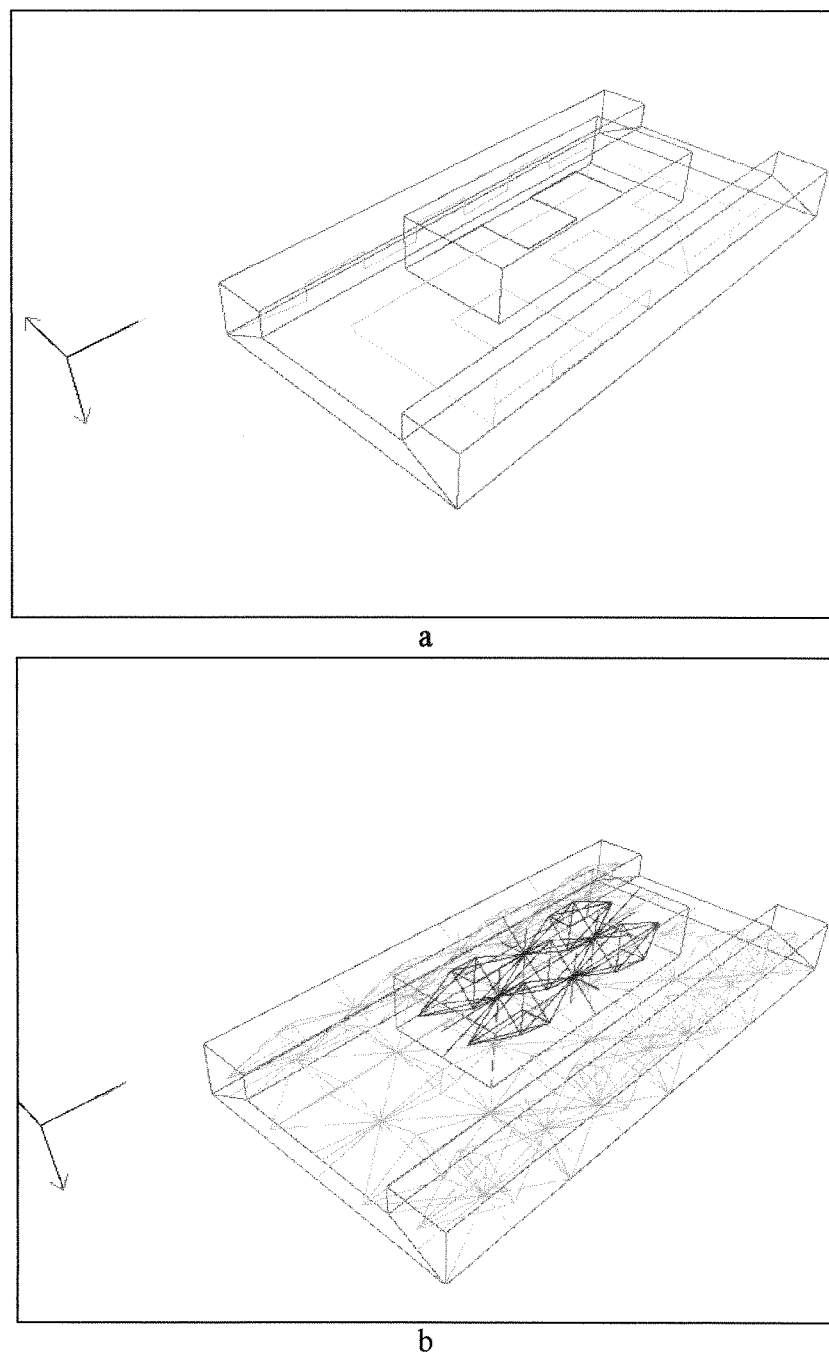


Fig. 8.9: Structura a) arborelui și b) coarborelui interior al muchiiilor (Exemplul 3)

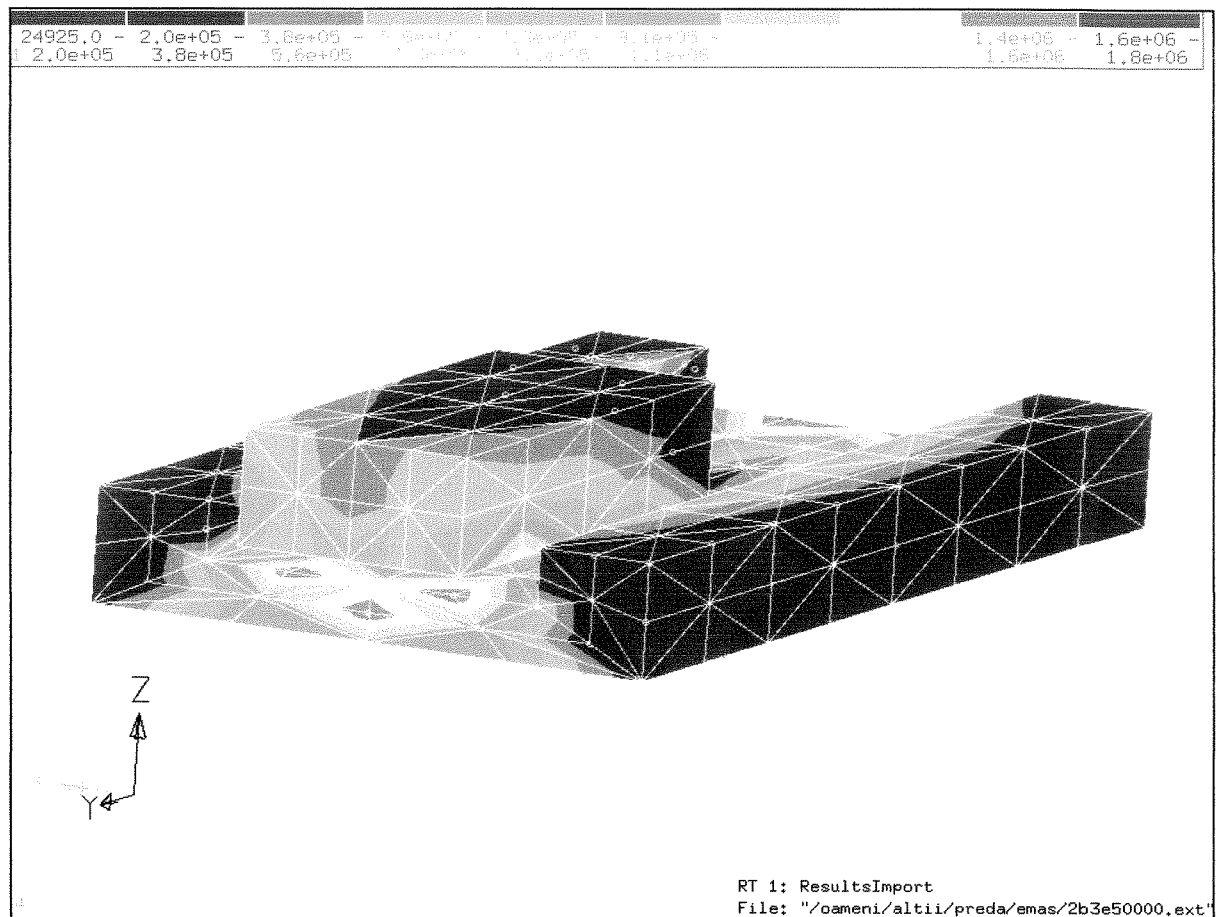


Fig. 8.11: Densitatea de volum a pierderilor prin curenți turbionari la suprafața celor două conductoare în mișcare (Exemplul 3)

8.4 Exemplul 4: Două plăci feromagnetice plasate în preajma unei spire parcurse de curent variabil rampă

Două plăci feromagnetice având caracteristica de magnetizare prezentată în Figura 8.12 se deplasează cu vitezele $v_1 = 1$ m/s și $v_2 = -1$ m/s în planul xy , după direcția y față de o spirală parcursă de un curent cu variație rampă, $I(t) = I_0 \cdot t$, cu $I_0 = 10$ kA. Dimensiunile

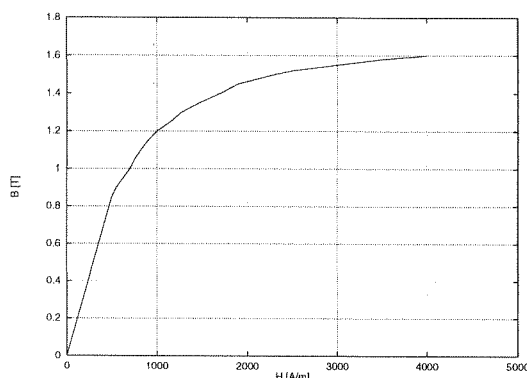


Fig. 8.12: Caracteristica $B=B(H)$ pentru materialul nelinier de la Exemplul 4

corpurilor sunt $1.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$. Cele două plăci se găsesc la distanța de 0.2 m una de cealaltă, spira fiind situată la egală distanță de amândouă (0.1 m). Rezistivitatea corpurilor este $\rho = 2 \times 10^{-8} \text{ A}$. Se discretizează corpurile conductoare folosind o rețea parametrică de tetraedre, cu numărul de tetraedre 320 și cu 194 muchii active (muchii coarboarele interior). Domeniile feromagnetice (identice cu cele conductoare, în exemplul considerat) se modelează folosind o rețea de hexaedre, cu 64 de subdomenii.

În Figura 8.13 este prezentată distribuția curenților turbionari în cele două plăci feromagnetice pentru patru momente de timp.

8.5 Exemplul 5: Un magnet în mișcare cu viteză impusă în preajma unei plăci feromagnetice

Geometria problemei este prezentată în Figura 8.14. Un magnet cu dimensiunile $0.02 \text{ m} \times 0.02 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}$ este deplasat cu viteză impusă în vecinătatea unei plăci feromagnetice având dimensiunile $0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} \times 0.02 \text{ m}$. Magnetul este deplasat cu viteza $v = 1$ m/s în direcția axei z , fiind îndepărtat de corp. Poziția inițială este la distanța de 0.02 m deasupra plăcii. Magnetul are magnetizația impusă $M = 1 \cdot 10^6 \text{ A/m}$. Placa are caracteristica neliniară prezentată în Figura 8.12. Placa este discretizată folosind 243 de noduri și 640 de tetraedre, pentru domeniul conductor. Un număr de 128 de subdomenii magnetice hexaedrale sunt utilizate pentru placă.

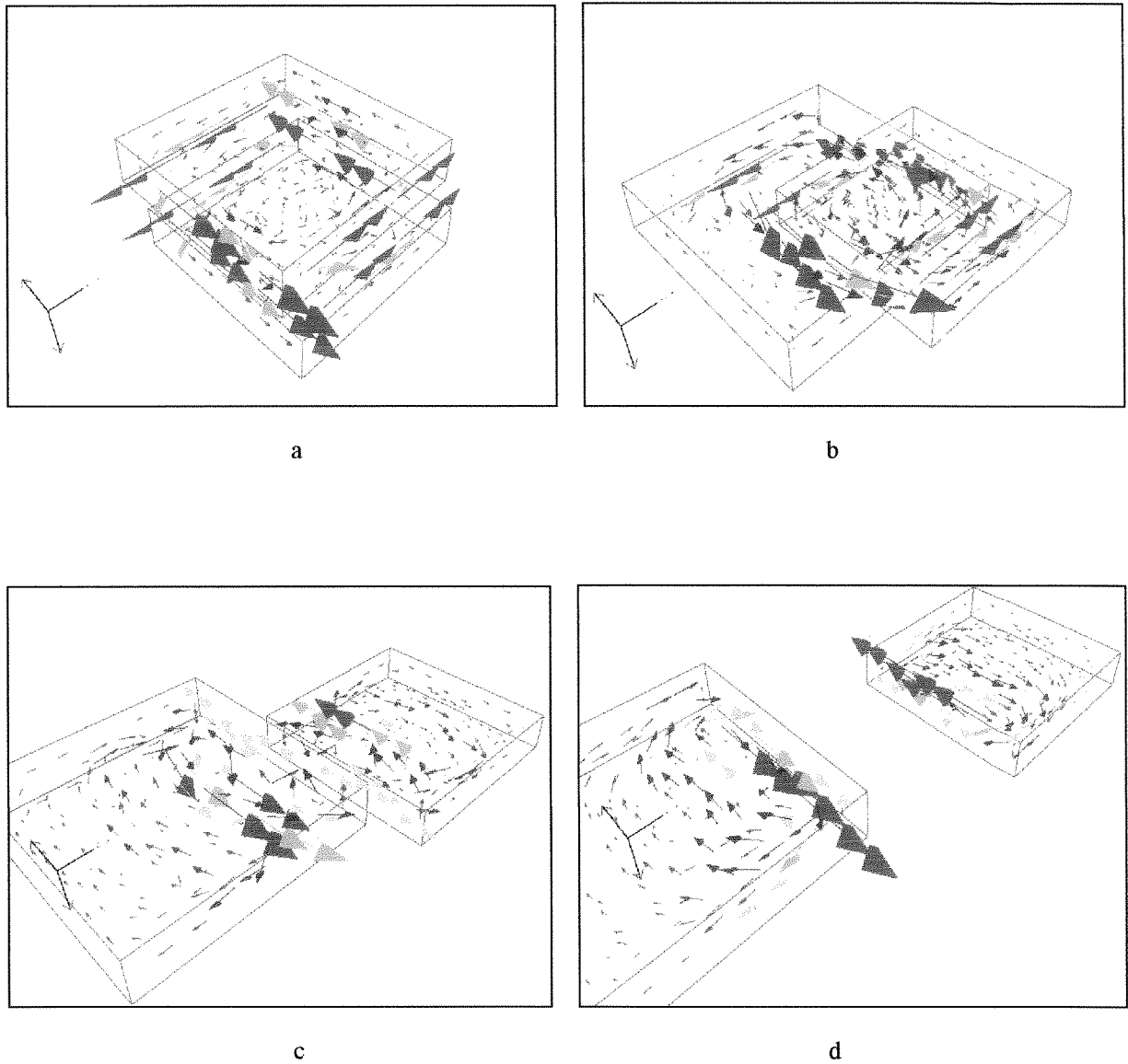


Fig. 8.13: Distribuția curenților turbionari în cele două plăci feromagnetice în mișcare (Exemplul 4) pentru patru momente de timp: a) $t = 10$ ms; b) $t = 350$ ms; c) $t = 700$ ms; d) $t = 900$ ms

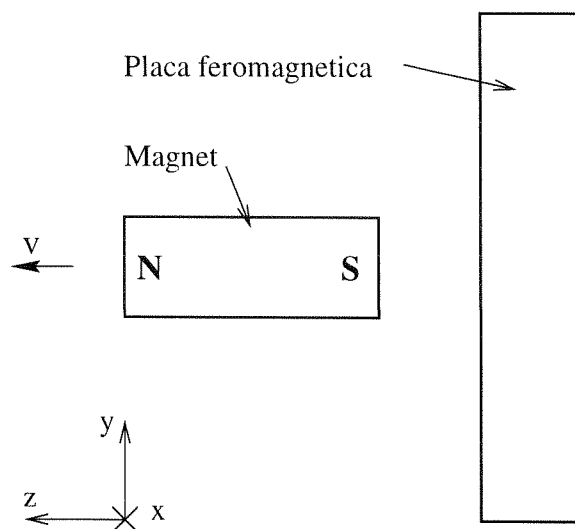


Fig. 8.14: Geometria problemei de la Exemplul 5

Pierderile totale în placă prin curenți turbionari în funcție de poziția magnetului sunt prezentate în Figura 8.15.

În Figura 8.16 se prezintă distribuția curenților turbionari induși în placă pentru trei momente diferite de timp.

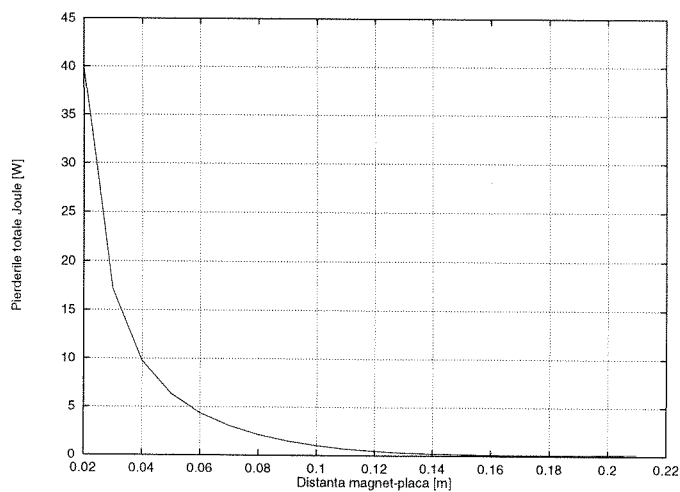


Fig. 8.15: Pierderile totale prin curenți turbionari în funcție de poziția magnetului

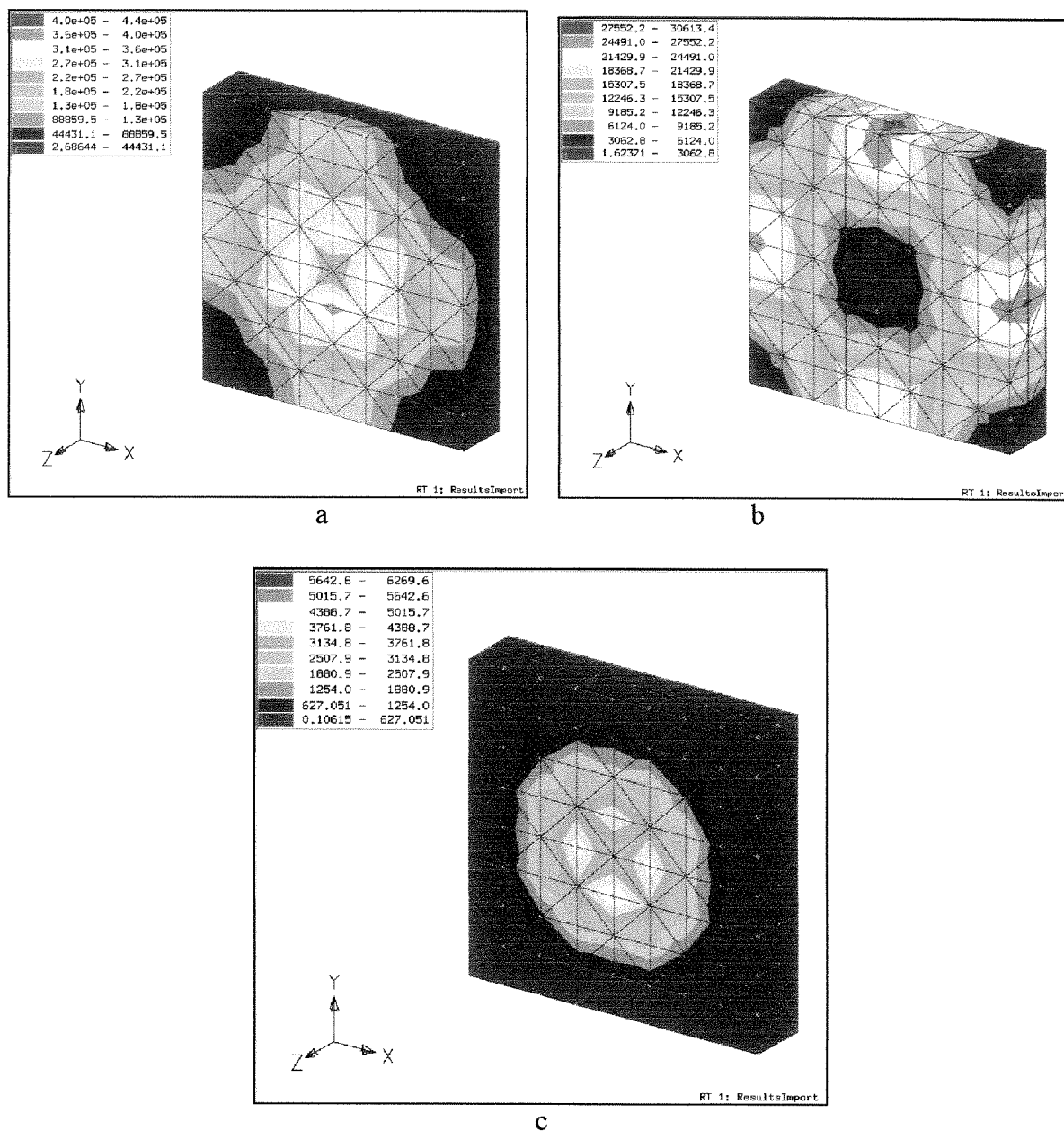


Fig. 8.16: Densitatea de curent pe suprafața plăcii feromagnetice a curenților turbionari (Exemplul 5) pentru trei momente de timp diferite.

Capitolul 9

Concluzii

9.1 Concluzii generale

În ultimii ani metodele integrale pentru rezolvarea problemelor de curenți turbionari par să câștige un avantaj deosebit prin posibilitatea includerii studiului materialelor neliniare magnetic, ușurința programării calculului paralel, avantajele ce vin să se adauge celor deja exploatate, dimensiunea mică a sistemului de ecuații sau inexistența frontierelor artificiale. Aceste avantaje devin foarte importante când aceste formulări integrale se aplică unor probleme ce includ mișcarea corpurilor, în special în cazul mișcării corpurilor rigide. Cum aerul nu este discretizat, nu apar probleme datorită mișcării legate de refacerea discretizării în zona de contact.

În cele ce urmează, voi recapitula principalele contribuții originale importante în realizarea acestei lucrări și voi sublinia avantajele folosirii acestei metode.

9.2 Contribuții originale

Am enunțat și demonstrat o teoremă de unicitate a soluției problemei de câmp pentru structuri cu medii în mișcare și bobine care pot fi și supraconductoare.

Am propus o nouă metodă de calcul pentru curenții turbionari în medii în mișcare, incluzând medii conductoare și/sau neliniare magnetic, surse filiforme care pot fi și bobine supraconductoare și bobine fasciculare masive. Ecuațiile câmpului sunt scrise în sisteme de referință atașate corpurilor în mișcare. Se pot utiliza atâtea sisteme de referință de câte avem nevoie pentru a caracteriza local mărimile de câmp în corpurile conductoare rigide. Două formulări sunt propuse: o formulare în \mathbf{T} , potențialul electric vector și o formulare în $\mathbf{T} - integral$, integrala în timp a potențialului electric vector. Metoda se bazează pe formularea integrală Albanese-Hăntîlă-Rubinacci, dezvoltată pentru medii imobile, extinsă aici pentru medii în mișcare și are următoarele caracteristici:

1. Este o metodă integrală, în care operatorul integral este de tip "volum-volum";

2. viteza nu apare explicit în ecuații, mișcarea este inclusă în variația în timp a coeficienților ce depinde de timp.
3. Se lucrează în potențial electric vector sau în potențial electric vector integrat în timp;
4. Se utilizează elemente de muchie, o condiție de etalonare topologică și o procedură de tip Galerkin;
5. Necunoscutele sunt circulațiile lui \mathbf{T} pe corzile arborelui interior;
6. Domeniile conductoare sunt modelate cu tetraedre iar cele feromagnetice cu hexaedre; domeniile conductoare pot fi identice cu cele feromagnetice dar discretizarea dublă în aceste domenii permite utilizarea unei discretizări mai puțin fine pentru domeniile neliniare.
7. Pentru fiecare pas de timp se rezolvă o problemă liniară sau neliniară (în cazul existenței domeniilor feromagnetice); neliniaritatea se tratează folosind metoda Hăntilă:
 - Se înlocuiește mediul neliniar cu unul liniar, de permeabilitate μ_0 .
 - Magnetizația se corectează iterativ funcție de inducțiile medii pe subdomeniile magnetice printr-o procedură de tip Picard-Banach.
 - La fiecare pas nou de timp se pornesc iterațiile cu magnetizația calculată la pasul anterior de timp.
8. Rezolvarea sistemului de ecuații rezultat se face cu Crank-Nicholson, cu pas de timp constant;

Am implementat un pachet de programe de calcul care permit calculul densității curenților turbionari, pierderilor prin curenți turbionari și forțelor exercitate asupra corpurilor în mișcare, pentru medii neliniare. Viteza este impusă. Pentru integrarea numerică am propus o procedură de sumare cu controlul erorii, pentru integralele de volum sau de suprafață. O procedură flexibilă permite alegerea celei mai eficiente metode de integrare, din punct de vedere al timpului de calcul și al preciziei, alegând între integrare analitică, cuadratură Gauss și această metodă de sumare. Forțele se calculează cu metoda integrării tensorului tensiunilor maxwelliene, alegând o suprafață obținută prin extrapolarea punctelor suprafeței corpului asupra căruia se exercită forța.

Am implementat o aplicație paralelă, pentru a proba caracterul intrinsec paralel al metodei integrale dezvoltate.

9.3 Concluzii finale

Rezultatele numerice obținute pentru calculul curenților turbionari și ai forțelor în corpuri în mișcare, folosind metoda integrală propusă, probează acuratețea metodei propuse. Av-

antajele specifice acestei metode, care se adaugă avantajelor tuturor metodelor integrale sunt:

1. Sistemele de referința atașate corpurilor în mișcare conduc la o ecuație mai simplă, cu mai puțini termeni de calculat; ecuația este stabilă; singura precauție necesară este corelarea pasului de timp cu viteza și dimensiunea pasului rețelei.
2. Utilizarea, pentru medii neliniare a formulării în $\mathbf{T} - \text{integral}$ asigură o modelare mai bună a dependenței $\mathbf{B} - \mathbf{H}$, de fapt $\mathbf{M} - \mathbf{B}$.
3. Utilizarea discretizării duble, pentru medii conductoare și feromagnetice, permite modelarea cu subdomenii mai puțin fine a domeniilor magnetice față de cele care modelează domeniile conductoare.
4. Datorită faptului că necunoscutele sistemului sunt doar circulațiile lui \mathbf{T} sau ale lui $\mathbf{T} - \text{integral}$ pe corzile coarboarelor interior, dimensiunea sistemului este mică, deși matricea care rezultă este plină.
5. La fiecare pas de timp se recalculează numai o parte din termenii acestui sistem și anume aceia care depind de timp (termenii care cupleză muchii sau muchii și subdomenii magnetice aflate în corpuri care se deplasează cu viteze diferite).
6. Nici una din matricile semnificative nu este recalculată în timpul iterațiilor neliniare.
7. Pentru această metodă, paralelizarea calculului termenilor matricilor este foarte ușoară și aceasta poate duce la o economie importantă de timp pentru rezolvarea problemei.

Adaptarea acestei metode de calcul și pentru medii multiplu conexe, modelarea dependenței $\mathbf{E} - \mathbf{J}$ în materialele supraconductoare, tratarea fenomenelor de histerezis magnetic, paralelizarea inversării matricii sistemului, calculul forțelor și momentelor pentru rezolvarea ecuației mecanice sunt doar câteva continuări posibile ale acestei lucrări.

Anexa A

Calculul integralei $\int_{\Omega} rot \mathbf{N}_{\mathbf{k}} grad V dv = 0$

Fie:

$$I = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times grad V) \mathbf{n} dA = \oint_{\partial\Omega} -(\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}) grad V dA \quad (\text{A.1})$$

Componenta normală a lui $\mathbf{N}_{\mathbf{k}}$ este nulă:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{n} = (\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} + \mathbf{N}_{\mathbf{k}n}) \times bfn = (\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} + \mathbf{n} \times \mathbf{N}_{\mathbf{k}}) \times bfn = (\mathbf{n} \times \mathbf{n}) \mathbf{N}_{\mathbf{k}} + \mathbf{N}_{\mathbf{k}t} \times \mathbf{n} \quad (\text{A.2})$$

deci integrala se reduce la:

$$I = - \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} \times \mathbf{n}) grad V dA \quad (\text{A.3})$$

dar $\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} = 0$ pe frontieră, deoarece componenta tangențială a lui $\mathbf{N}_{\mathbf{k}}$ se conservă. Utilizând Relația Gauss-Ostrograski obținem:

$$-I = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}) grad V dA = \int_{\Omega} div(\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times grad V) dv = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} \times grad V) dv \quad (\text{A.4})$$

Integrandul din ultima ecuație se poate prelucra astfel:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times grad V) &= \nabla(\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} \times grad V) = \nabla(\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} \times grad V) + \nabla(\mathbf{N}_{\mathbf{k}n} \times grad V) = \\ &(\nabla \times \mathbf{N}_{\mathbf{k}t}) grad V = -\mathbf{N}_{\mathbf{k}t} (\nabla \times grad V) = (\nabla \times \mathbf{N}_{\mathbf{k}t}) grad V \end{aligned}$$

deci integrala se poate scrie:

$$-I = \oint_{\partial\Omega} \nabla(\mathbf{N}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}) grad V dA = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{N}_{\mathbf{k}}) grad V dv = \int_{\Omega} rot \mathbf{N}_{\mathbf{k}} grad V dv = 0 \quad (\text{A.5})$$

Anexa B

Definiția numărului Peclet în electromagnetism; tehnica ”up-winding”

În electromagnetism, numărul Peclet se definește ca:

$$Pe = \frac{v\sigma h}{\nu}$$

unde:

- h - este dimensiunea geometrică (pe direcția de mișcare) a elementului curent;
- v - este viteza de deplasare;
- σ - este conductivitatea mediului;
- ν - este inversul permeabilității materialului.

La valori mari ale numărului Peclet ($Pe \gg 1$) ecuația este instabilă (un număr Peclet mare corespunde unei ponderi mari a termenului de ordinul 1 în ecuația diferențială). Metoda general acceptată pentru a depăși această problemă care apare la numere Peclet mari este utilizarea unei tehnici așa numite *up – winding*. Aceasta implică înlocuirea funcțiilor de formă simetrice prin altele mai generale sau deplasarea punctelor de integrare în cuadratura Gauss la integrarea termenului de ordinul întâi.

Să presupunem o problemă de curenți turbionari, în care, datorită existenței unor structuri în mișcare, în scrierea ecuațiilor apare și un termen conținând viteza. Din legea inducției, legea circuitului magnetic și legea conducției și utilizând potențialul magnetic vector avem:

$$\mathbf{J} = \text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla \mathbf{A} \right) + \mathbf{J}$$

Dacă am considera problema unidimensională, ecuația pe care o obținem este de tipul:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dt} \right) + \beta \frac{du}{dt} = 0 \quad 0 < x < L$$

cu condițiile pe frontieră

$$u(0) = 1, \quad u(L) = 0$$

și $k > 0$ și β - constant. Soluția exactă în acest caz este:

$$u(x) = A + Be^{px} = \frac{e^{px} - e^{pL}}{1 - e^{pL}}$$

unde $p = \beta/k$ este numărul Peclet.

Aplicând metoda Galerkin folosind elemente izoparametice ecuației în potențial vector, pe o rețea uniformă cu un număr de N celule de lungime h , obținem un set de ecuații liniare de forma:

$$\frac{k}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{\beta}{2}(u_i - u_{i-1}) = \frac{k}{h}(u_{i+1} - u_i) - \frac{\beta}{2}(u_{i+1} - u_i)$$

$$-\left(\frac{k}{h} + \frac{\beta}{2}\right)u_{i-1} + \frac{k}{h}u_i - \left(\frac{k}{h} - \frac{\beta}{2}\right)u_{i+1} = 0$$

Dacă substituim $Pe = \beta h/2k$ - numărul de celulă (de rețea) Peclet, ecuația anterioară se poate scrie simplificat:

$$-(1 + Pe)u_{i-1} + 2u_i - (1 - Pe)u_{i+1} = 0.$$

Această ecuație are soluția exactă:

$$u_i = \begin{cases} A + B \frac{(1+Pe)^i}{1-Pe} & Pe = 1 \\ u_{i-1} & Pe = 1 \end{cases}$$

unde A și B sunt constante care trebuie determinate din condițiile pe frontieră. Este evident din această ecuație că numai soluția cu $-1 < Pe < 1$ este stabilă. Aceasta ne determină să folosim *up - winding* pentru a elimina oscilațiile.

Oscilațiile sunt provocate de metoda elementelor finite standard care folosește aceeași schemă pentru ca și cea pentru diferențe finite centrate pentru a discretiza elementul de ordinul întâi (în ecuația diferențială) $v \partial \mathbf{A} / \partial x$. În metoda elementului finit cu *up - wind* complet, schema de diferențe finite într-o singură parte este aplicată pentru a elimina oscilația:

$$\beta \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_i} = \begin{cases} \beta_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} & \beta_i < 0 \\ \beta_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} & \beta_i > 0 \end{cases}$$

Cu aceasta, pentru $\beta > 0$ obținem:

$$-\left(\frac{k}{h} + \frac{\beta}{2}\right)u_{i-1} + \frac{k}{h}u_i - \left(\frac{k}{h} - \frac{\beta}{2}\right)u_{i+1} = 0$$

sau:

$$-(1 + 2Pe)u_{i-1} + (2 + 2Pe)u_i - u_{i+1} = 0.$$

Soluția acestei ecuații este:

$$u_i = A + B(1 + 2Pe)^i$$

În acest caz, cum $Pe > 0$, soluția poate fi stabilă pentru orice viteză. Totuși, schema de element finit cu *up - wind* generează erori când este aplicată pentru numere *Peclet* mici.

Pentru a generaliza metoda *up - wind* se modifică ecuația diferențială astfel:

$$-\left(\frac{k}{h} + \frac{\beta}{2}(1 + \xi)\right)u_{i-1} + \left(\frac{k}{h}u_i + \frac{\beta}{2}(1 + \xi) - \frac{\beta}{2}(1 - \xi)\right)u_i - \left(\frac{k}{h} - \frac{\beta}{2}(1 - \xi)\right)u_{i+1} = 0$$

în care ξ se stabilește după cum vom arăta imediat. Folosind numărul de rețea *Peclet*, ecuația anterioară devine:

$$-(1 + Pe(1 + \xi))u_{i-1} + 2(1 + Pe\xi)u_i - (1 - Pe(1 - \xi))u_{i+1} = 0$$

Soluția acestei ecuații este:

$$u_i = A + B \left(\frac{1 + Pe(1 + \xi)}{1 - Pe(1 - \xi)} \right)^i$$

. Observații:

- dacă $\xi = 0$, atunci metoda este identică metodei diferențelor finite centrate;
- dacă $Pe > 1$ și $\xi = 1$, metoda este identică metodei *up - winding* complete;
- Circumstanțele în care se asigură condiții de stabilitate (non-oscilație) a soluției sunt:

$$Pe > 0 \quad \xi > 1 - 1/Pe$$

$$Pe < 0 \quad \xi < 1 - 1/Pe$$

$$Pe \rightarrow \pm\infty \quad \xi \rightarrow \pm 1$$

În metoda *up - wind* optimală, ξ se determină ca o valoare optimă:

$$\xi = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}$$

Anexa C

Definiția numărului Courant

Numărul Courant se definește astfel:

$$C = v \frac{\delta t}{\delta x}$$

unde:

- v este viteza cu care se deplasează partea mobilă;
- δx este dimensiunea tipică a pasului rețelei în direcția de mișcare;
- δt este pasul de timp.

Pentru numere Courant $C < 1$, sistemul obținut este stabil și soluția obținută este precisă.

Anexa D

Rezolvarea numerică a sistemului de ecuații

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații se folosește o procedură Crank-Nicholson cu pas de timp constant. Pentru medii neliniare magnetic, sistemul de ecuații se poate scrie:

$$\{R\}_{k+\frac{1}{2}} \frac{[\alpha]_{k+1} + [\alpha]_k}{2} + \frac{\{L\}_{k+1}[\alpha]_{k+1} - \{L\}_k[\alpha]_k}{\Delta t_{k+1}} = [U] + [V] = \quad (D.1)$$

$$\frac{[b]_{k+1} - [b]_k}{\Delta t_{k+1}} + \frac{[c]_{k+1} - [c]_k}{\Delta t_{k+1}} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

unde am notat cu:

$$b_k = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \text{rot } \mathbf{N}_k \int_{\Omega_0} \frac{\mathbf{J}_0}{r} dv dv \quad (D.2)$$

și:

$$c_k = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \text{rot } \mathbf{N}_k \int_{\Omega_F} \frac{(\mathbf{M} \times \mathbf{r})}{r} dv dv \quad (D.3)$$

De aici se obține sistemul:

$$\{Q\}_k [\alpha]_{k+1}^{i+u} = [P]_k + [S]_k^i \quad (D.4)$$

cu notațiile:

$$\{Q\}_k = \{R\}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \{L\}_{k+1} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (D.5)$$

$$[P]_k = [b]_{k+1} - [b]_k \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (D.6)$$

$$[S]_k^i = [c]_{k+1}^{i+u} - [c]_k^i - \left(\{R\}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Delta t}{2} - \{L\}_k \right) [\alpha]_k^i \quad \text{cu } u = \begin{cases} 1 & \text{pt. iter. magn.} \\ 0 & \text{pt. pas de timp} \end{cases} \quad (D.7)$$

Aceasta ne permite să calculăm matricile $\{L\}$ și vectorii $[U]$ și $[V]$ la capetele intervalului de timp curent Δt_k . Vom avea în consecință, pentru cazul mediilor neliniare, în formularea cu potențial electric vector \mathbf{T} următorul algoritm:

- (P0) Se calculează valorile inițiale ale matricilor $\{L\}$, $\{R\}$ și ale vectorilor $[U]$ și $[V]$; pentru $\mathbf{B} = 0$ la $t_0 = 0$, $[U]$ și $[V]$ vor fi nule; se calculează și $[U]$ și $[V]$ pentru $t = \Delta t_k$ cu $k = 1$;
- (P1) Se aplică procedura Crank-Nicholson pentru un pas de timp și, iterativ, pentru tratarea neliniarității. Se factorizează matricea $\{Q\}$. Se rezolvă sistemul matricial (D.4) pentru $i=0$;
- (P2) Se repetă pasul P1 cu același k și $i > 0$ atâta timp cât nu se obține condiția de convergență pentru magnetizație; la fiecare pas se recalculează $[V]$ în care se schimbă doar magnetizația \mathbf{M} care se obține în funcție de inducțiile medii pe subdomenii $\tilde{\mathbf{B}}$, calculate pentru noile valori ale densității de curent \mathbf{J} și ale magnetizației \mathbf{M} corectate la pasul anterior. Pentru că \mathbf{a}_{kp} nu se schimbă, efortul de calcul este foarte mic;
- (P3) Se recalculează $\{L\}$, $\{R\}$, $[U]$ și $[V]$ pentru pasul următor de timp, magnetizația se ia cea obținută la pasul anterior de timp; se repetă pasul P1.

În această formulare, considerăm că \mathbf{B} variază liniar într-un interval de timp Δt . Dar pentru o variație liniară a lui \mathbf{B} , magnetizația \mathbf{M} are o variație neliniară. Deci, pentru un curent-sursă cu variație de tip rampă, inducția câmpului magnetic are o variație de tip rampă, pe fiecare interval de timp, \mathbf{B} variază liniar. În cazul în care nu avem medii neliniare, în algoritm dispăre pasul P2 și este avantajos să inversăm la fiecare pas sistemul (D.4) simplificat cu Gauss.

În formularea cu \mathbf{T} -integral, sistemul, în care termenii $\{L\}$, $\{R\}$, b_k și c_k își păstrează aceleași semnificații, devine:

$$\{R\}_{k+\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{\Delta t_{j+1}}{2} ([\alpha]_{j+1} + [\alpha]_j) + \{L\}_{k+\frac{1}{2}} \frac{[\alpha]_{k+1} + [\alpha]_k}{2} = [U] + [V] = \quad (D.8)$$

$$\frac{[b]_{k+1} - [b]_k}{2} + \frac{[c]_{k+1} - [c]_k}{2} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$\{L\}$ se recalculează la mijlocul intervalului de timp curent. Se obține sistemul de ecuații:

$$\{Q\}_k [\alpha]_{k+1}^{i+u} = [P]_k + [S]_k^i \quad (D.9)$$

cu notațiile:

$$\{Q\}_k = \{R\}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t + \{L\}_{k+\frac{1}{2}} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (D.10)$$

$$[P]_k = \frac{[b]_{k+1} + [b]_k}{2} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (D.11)$$

$$[S]_k^i = \frac{[c]_{k+1}^{i+u} + [c]_k^i}{2} - \{R\}_{k+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t \sum_{j=0}^k k [\alpha]_j - \{L\}_{k+\frac{1}{2}} [\alpha]_k^i \quad \text{cu } u = \begin{cases} 1 & \text{pt. iter. magn.} \\ 0 & \text{pt. pas de timp} \end{cases} \quad (D.12)$$

Algoritmul de calcul are aceeași pași ca și pentru formularea în \mathbf{T} . Nu intervin modificări nici în procedura de calcul a magnetizației \mathbf{M} , respectiv a inducției medii pe

subdomenii $\bar{\mathbf{B}}$, pentru iterațiile neliniare. Considerând $\mathbf{B}(t) = 0$ pentru $t=0$ și o variație de tip rampă a curentului sursă, se aproximează, cu această metodă, valoarea lui \mathbf{B} pe un interval de timp Δt ca fiind constantă și crescând în mici trepte $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{t}$ la fiecare pas de timp. Considerând \mathbf{B} constant pe intervale de timp Δt , valoarea magnetizației este și ea constantă, fiind bine calculată în aceste intervale de timp, funcție de \mathbf{B} .

Este deci util să folosim formularea în \mathbf{T} – *integral* pentru medii neliniare magnetice iar formularea în \mathbf{T} când tratăm doar medii ne-feromagnetice. Solverul implementat permite alegerea uneia din variante.

Anexa E

Pachetul de programe de calcul

Pachetul de programe este structurat în cinci părți funcționale. O parte asigură comunicarea cu preprocesorul pachetului MSC-EMAS, de la care este preluată geometria și discretizarea problemei, respectiv lista de noduri, de tetraedre și o listă cu nodurile de pe frontiera. Pornind de la aceste informații, sunt asamblate structurile ce definesc intern geometria problemei, incluzând listele cu elementele arborelui și coarborelui interior, listele fețelor interioare și exterioare. O parte din programele care interacționează cu preprocesorul MSC-EMAS sunt dezvoltate pornind de la aplicații furnizate de Irina Munteanu și Ioan Gheorma.

O a doua parte cuprinde procedurile care calculează elementele matricilor sistemului și recalculază acele blocuri ale matricilor ce conțin termenii care se modifică la fiecare pas de timp. Se exploatează, acolo unde este cazul, simetria matricilor. Se folosesc, pentru a reduce efortul de calcul, liste de căutare și proceduri de integrare numerică rapide. Sursele pot fi bobine supraconductoare și se folosește o simplificare, considerându-le filiforme. Se pot modela și bobine formate din înfășurări filamentare ca înfășurări masive, discretizându-le cu elemente hexaedrale în care se impune densitatea de curent echivalentă.

A treia parte asigură rezolvarea sistemului de ecuații la fiecare iterație neliniară și la fiecare pas de timp. Solverul implementează o procedură Crank-Nicholson cu pas de timp constant și o procedură iterativă de calcul a magnetizației, pentru cele două formulări propuse, în \mathbf{T} și în $\mathbf{T} - \text{integral}$. Din circulațiile lui \mathbf{T} calculate la fiecare pas de timp și iterație neliniară, se recalculază densitatea de curent în fiecare tetraedru, care este mărime de intrare pentru următoarea iterație sau rezultat, la un pas de timp, care este stocat, pentru a fi post-procesat.

O a patra parte asigură calculul pierderilor și forțele exercitate asupra corpurilor. Aceasta folosește rezultatele de la fiecare pas de timp. Se calculează densitatea de volum a pierderilor la fiecare pas de timp și, integrând pe volumul corpurilor conductoare, se obțin pierderile totale. Pentru calculul forței asupra unui corp conductor, se integrează, folosind cuadratura Gauss, pe o suprafață exterioară corpului, tensorul tensiunilor Maxwelliene. Definirea suprafeței se face pornind de la lista suprafețelor orientate care discretizează

suprafața exterioară a fiecărui corp conductor. Avantajul este că nu mai trebuie să definim o altă suprafață și aceasta este deja discretizată. Pentru calculul valorii tensorului tensiunilor Maxwelliene în fiecare punct de integrare pe suprafața exterioară, calculăm pe \mathbf{B} în aceste puncte, folosind quadratura Gauss pentru calculul integralelor pe sub-domeniile sursă.

Ultima parte asigură comunicarea cu postprocesorul MSC-EMAS sau cu un alt post-procesor, dezvoltat inițial pe platforma AIX, pentru vizualizarea rezultatelor. Post-procesorul MSC-EMAS a fost utilizat pentru reprezentarea densităților de curent în corpurile conductoare și a densității de volum a pierderilor prin curenți turbionari. Post-procesorul dezvoltat de mine este implementat folosind biblioteca grafică VOGL (Very Ordinary Graphic Library) care permite realizarea unor aplicații grafice incluzând redare tridimensională și animație. Post-procesorul l-am utilizat pentru reprezentarea arborelui/coarborelui interior definit în rețeaua de discretizare a corpurilor conductoare, pentru vizualizarea densităților de curent în subdomeniile tetraedrale ale corpurilor conductoare. Implementarea permite și animația cadrelor succesive ce corespund fiecărui moment de timp.

Anexa F

Implementarea paralelă folosind MPI a procedurii de calcul a termenilor sistemului

În ultimul timp au fost propuse formulări integrale pentru probleme de curenți turbionari într-o implementare paralelă în care nu numai inversarea matricii este paralelizată ci și calculul termenilor sistemului, dacă acesta cere un timp de calcul ridicat. Într-un caz ipotetic, în care procesoarele ar avea capacitate de calcul egală și viteză de comunicare foarte mare, "speed-up"-ul, adică creșterea vitezei de procesare prin paralelizare ar fi practic direct proporțional cu numărul de procesoare utilizat. În cazul real, studiat de mine, pentru rețeaua pe care am avut-o la dispoziție, puterea de calcul a mașinilor este foarte diferită, viteza de comunicație este oscilantă și în general destul de mică și încărcarea mașinilor, datorită și altor aplicații rulate în același timp pe ele, se schimbă rapid. De aceea am studiat patru variante de implementare pentru calculul paralel folosind MPI al matricilor pentru calculul cărora se consumă cel mai mare timp CPU.

Matricea de inductanță este plină iar calculul fiecărui termen al ei necesită inițial un efort CPU semnificativ datorită dublelor integrale de volum pe elementele discretizării spațiale (tetraede). Din fericire, aceste operații sunt independente, paralelizarea lor fiind extrem de ușoară. Fiind simetrică, numai o jumătate (triunghilar superioară, de exemplu, trebuie calculată. De asemenea, la fiecare pas de timp trebuie recalculat un bloc dreptunghiular nediagonal, conținând termenii indexați de muchii din corpuri în mișcare relativă. În cazul neliniar și alte matrici trebuie calculate (matrici întregi triangulare și sub-blocuri nediagonale la fiecare pas de timp).

O abordare de tip Master-Slave

Această abordare este una clasică. Primele implementări ale paralelismului se bazează pe acest model. Principalul dezavantaj al acestui model este: unui procesor (master) îi este încredințat numai rolul de a distribui sarcinile, celelalte procesoare (slaves) sunt destinate să îndeplinească aceste sarcini, adică să execute calculele.

Avantajul principal: într-un mediu de calcul real, cu procesoare inegal încărcate, cu mașini cu viteze și resurse de memorie diferite, echilibrarea sarcinilor e greu de realizat în așa fel încât timpul de calcul al fiecărui procesor să fie cât mai mic și, pe cât posibil, timpii diferitelor procesoare să fie cât mai apropiați. Evaluarea capacității fiecărui procesor poate să fie făcută dar această soluție e inefficientă, pentru că încărcarea fiecărui procesor poate să se schimbe în mod imprevizibil, într-un mediu de calcul deschis mai multor utilizatori. Astfel, o echilibrare dinamică pare să fie soluția ideală pentru a optimiza calculul, scăzând timpul CPU. Alte posibile dezavantaje: granularitatea excesivă a calculului, utilă pentru o mai bună echilibrare dinamică, mărește timpul de calcul total datorită numeroaselor transmisii de date într-un mediu distribuit cu viteză de transfer scăzută.

Prezint un algoritm foarte simplu pentru acest model:

1. Masterul (procesul 0)

- trimite sclavilor (toate celelalte procese) indexul unui bloc ce trebuie calculat; blocul este o parte a vectorului în care este stocată matricea.
- Apoi masterul așteaptă să primească mesaje de la sclavi. Când un sclav a terminat o sarcină, trimite un pachet (package) conținând indexul blocului și blocul de rezultate; masterul determină proveniența și trimite imediat o nouă sarcină procesorului liber.
- În final, când întreaga matrice a fost calculată, masterul trimite tuturor sclavilor un mesaj să încheie execuția.

2. Sclavii (procesele de la 1 la numărul de procese - 1) solicită sarcini de la master, execută sarcinile și trimit apoi un pachet masterului conținând rezultatele calculelor.

Acest algoritm e implementat în C, folosind pre-divizarea matricii pentru a programa sarcinile solicitate. E folosită împachetarea datelor de diferite tipuri (index + vectorul de date). Mai întâi e despachetat indexul sub-blocului calculat, ceea ce permite masterului să deducă dimensiunea vectorului de date ce urmează. Imediat ce este despachetat indexul, se trimite sclavului liber indexul următorului bloc de date ce poate fi calculat. În varianta în care masterul rulează pe cel mai puternic procesor, o parte din calcule sunt efectuate și de master.

Sarcini egal repartizate

În această implementare, cuvântul cheie este simplitatea; matricea triunghiulară este "spartă" într-un număr de părți egal cu numărul de procesoare; apoi, indexul fiecărei părți e trimis unui procesor și întreaga comunitate a procesoarelor execută sarcinile; în final, rezultatele sunt trimise (gathered) primului procesor (procesul 0) pentru a asambla matricea triunghiulară.

Un model Cartezian

Acest titlu este mai degrabă incitant decât potrivit dar îl putem folosi pentru a puncta unul dintre marile avantaje ale MPI atunci când avem de calculat matrici întregi : divizarea sarcinilor poate fi făcută foarte ușor folosind un izomorfism între structura Carteziană a procesoarelor și structura bidimensională a unei matrici dreptunghiulare. Desigur, topologii mult mai complexe pot fi implementate în MPI dar mă limitez doar la această structură simplă.

Mai întâi, se alege un număr de procesoare egal cu cel cerut sau acel număr potrivit pentru a forma o rețea carteziană regulată de procesoare. De exemplu, 4 procesoare pot forma cu ușurință o structură 2×2 , așa cum 6 procesoare pot forma o structură 3×2 . Cinci procesoare pot forma doar o structură 2×2 deci unul dintre procesoare va fi respins. După aceasta, dimensiunea fiecărui subbloc este calculată astfel încât să se potrivească cu structura Carteziană. Cum aceste dimensiuni nu sunt egale, pentru fiecare bloc recepționat trebuie utilizat un tip de date diferit care să se potrivească cu cel recepționat. Se folosesc vectori cu diferite dimensiuni și deplasamente. Această variantă este rezervată calculului blocurilor nedijagonale ale căror termeni se modifică la fiecare pas de timp.

O variantă perfectibilă pentru o structură circulară virtuală

Acest model poate fi sintetizat folosind un model SPMD: întreaga structură de date este divizată în părți aproape egale și fiecare procesor este alimentat cu o parte; procesoarele calculează sub-blocul matricii ce corespunde părții lui - fiecare procesor îndeplinește aceeași sarcină, acționând asupra unor structuri de date diferite; la fiecare pas, procesoarele efectuează aceeași operație asupra blocului curent; acesta este marele avantaj al metodei. După aceasta, procesoarele fac câteva permutări circulare, păstrând setul de date geometrice aflat în folosința lor și pasând blocul primit la pasul anterior vecinului care nu l-a folosit încă. În Figura F.1 e prezentată succesiunea calculelor efectuate de un ansamblu de n procesoare, pentru acest model. După cum se vede, o parte dintre procesoare nu lucrează în ultimul pas (al treilea, în acest exemplu cu 4 procesoare) și este preferabil ca cele mai puțin puternice să fie acestea.

Acest model poate fi îmbunătățit în felul următor:

1. Indexarea trebuie să fie precalculată;
2. Permutările circulare sunt virtuale, așa că nu e nevoie ca un procesor, odată eliberat, să aștepte ca toate celelalte să termine și ele; asta înseamnă că sincronizarea nu e necesară până la sfârșit.
3. Blocurile calculate de procesoare sunt transpuse în așa fel încât să se potrivească în matricea triunghiulară.

Rezultatele sunt transmise (gathered) la fiecare pas primului proces și sunt asamblate într-un vector indexat.

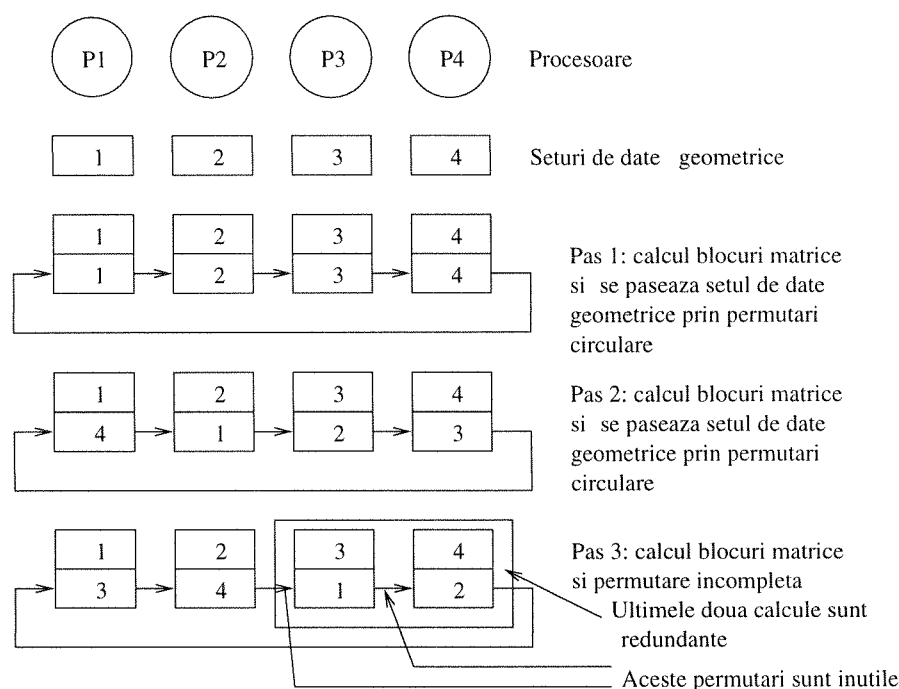


Fig. F.1: Permutări circulare pentru segmentele de date geometrice în calculul blocurilor matricii sistemului

Rezultate și concluzii

Prezint câteva aplicații ale acestei proceduri paralele într-un mediu în care capacitatea fiecărui procesor este diferită de a celorlalte, un mediu distribuit cu procesoare inegal încărcate și cu viteze de transmisie a datelor în rețea inegale. În Tabelul F.1 prezint, pentru rețeaua de calculatoare de la Centrul de calcul al Universității din Cassino, unde am efectuat aceste teste, puterea de calcul și vitezele comparate ale procesoarelor disponibile. Această informație este extrem de relevantă pentru rezultatele următoare; adăugarea unui nou procesor poate să conducă la mărirea timpului de lucru total, dacă viteza acestuia este mică. În Tabelul F.2 sunt prezentate rezultatele obținute folosind modelul Master-slave pentru rețeaua descrisă în Tabelul F.1. În Tabel sunt menționate timpul total de lucru, numele procesorului adăugat la lista procesoarelor și împărțirea sarcinilor (sarcinile elementare sunt egale) între procesoare.

Trebuie să adaug că acest set de rezultate este departe de a fi cel mai bun; o soluție pentru îmbunătățirea distribuției sarcinilor este să se țină seama și de dimensiunea optimă a pachetelor, în așa fel încât și timpul de transfer să fie optimizat. În cazul prezentat, și master-ul face o parte din operațiile de calcul, cuantumul sarcinilor îndeplinite de acesta stabilindu-se după o regulă empirică. Adăugarea de noi procesoare nu îmbunătățește timpul de calcul în mod eficient, mai ales dacă puterea lor de calcul este mică, așa cum se poate vedea, dacă se confruntă cifrele din Tabelul F.1 cu cele din Tabelul F.2.

În Figura F.2 prezint timpul de calcul pentru 2,3 și 4 procesoare, folosind a doua metodă, cu împărțirea egală a sarcinilor. Trebuie observat aici că procesorul pe care

Numele procesorului	Tipul procesorului	Timpul CPU raportat la timpul CPU al 3ct	Timpul calcul raportat la timpul calcul 3ct
3ct	IBM RS 6000 3ct	1	1
fast	IBM RS 6000 560	1.98	2.0
serv	IBM RS 6000 530H	2.95	5.33
mec1	IBM RS 6000 220	5.30	5.77
did1	IBM RS 6000 220	5.31	5.8
mec2	IBM RS 6000 220	5.32	10.12
ele1	IBM RS 6000 220	5.31	23.2

Tabelul F.1: Timpul CPU și timpul de calcul real raportat la timpul CPU și la timpul real pentru procesoarele disponibile în rețeaua Universității Cassino

Nr. proc./procesor	fast	serv	mec1	mec2	did1	ele1	Timp calcul [s]
2	1	18					13.66
3	2	9	8				5.83
4	3	6	5	5			4.31
5	2	4	5	5	3		3.41
6	2	5	4	4	3	1	3.42

Tabelul F.2: Împărțirea sarcinilor și timpul total de calcul pentru modelul master-slave funcție de numărul de procesoare utilizate

rulează consola MPI este cel mai rapid, celelalte trei având viteze comparabile.

Pentru modelul cartezian rezultatele sunt prezentate în Figura F.3. Se observă că speed-up-ul, creșterea vitezei prin creșterea numărului de procesoare este aproape liniar. În Figură se prezintă de fapt reducerea timpului total de calcul.

Pentru modelul permutărilor circulare virtuale, în implementarea îmbunătățită, fără calcule redundante, prezint rezultatele pentru 1,2,4 și 8 procesoare în Figura F.4. După cum se poate vedea în graficul timpului de calcul funcție de numărul de procesoare, timpul de calcul nu scade foarte mult dacă se trece de la 4 la 8 procesoare. Motivul este foarte simplu: cu creșterea numărului de procesoare scade efortul fiecărui procesor dar crește timpul dedicat comunicării datelor; în cazul concret studiat, procesoarele adăugate nu sunt foarte performante.

Rezultatele obținute sunt, cu toate acestea, încurajatoare. Pentru o rețea de calculatoare, cu mașini de performanțe diferite, cu încărcare diferită și oscilantă în timp, modelul de tip master-slave prezentat pare cel mai potrivit. Un model cartezian se adaptează cel mai bine calculului blocurilor dreptunghiulare; dacă vrem să facem și inversarea matricii, modelul cartezian ușurează foarte mult comunicațiile între procesoarele care operează

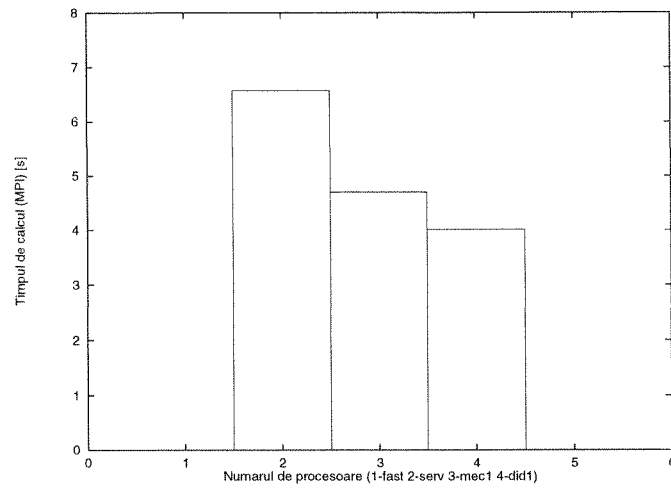


Fig. F.2: Timpul de calcul funcție de numărul de procesoare folosind împărțirea egală a sarcinilor pentru o structură geometrică de dimensiune 200

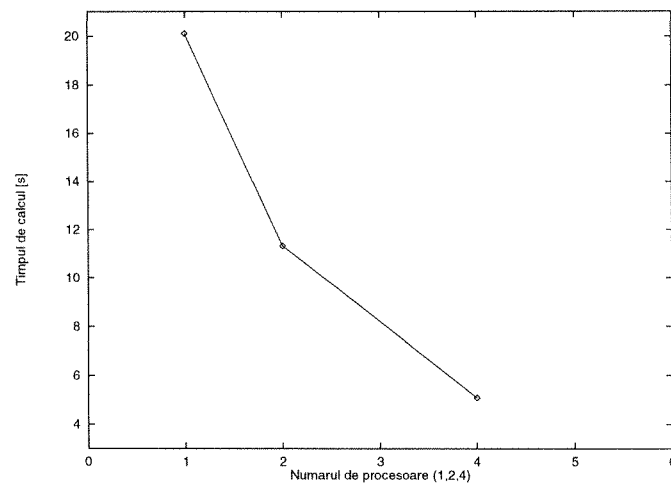


Fig. F.3: Timpul de calcul funcție de numărul de procesoare folosind modelul Cartezian pentru o structură geometrică de dimensiune 1000

fiecare asupra unuia din blocurile matricii totale. Ultimul model prezentat se adaptează bine unei mașini multiprocesoare. s

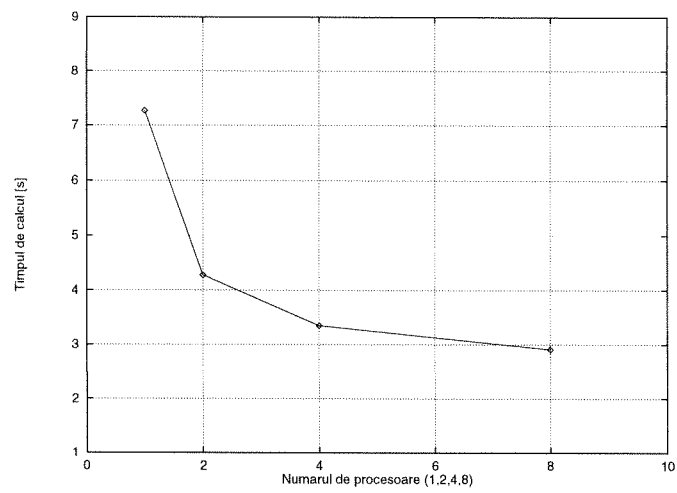


Fig. F.4: Timpul de calcul funcție de numărulde procesoare pentru procedura cu permutarea circulară vectorilor de date geometrice

Bibliografie

- [1] Gilles Akoun and Jean-Paul Yonnet. 3D analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets. *IEEE Trans. on Magn.*, MAG-20(5):1962–1964, September 1984.
- [2] R. Albanese, A. Formisano, R. Fresa, R. Martone, G. Rubinacci, and F. Villone. Numerical Analysis of a Coupled Problem: Time Evolution of a Tokamak Plasma in Contact with a Conducting Wall. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):984–989, 1996.
- [3] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, **G. Preda**, and G. Rubinacci. Integral Equation for 3D Eddy-Current in Moving Bodies. *Rev. Roum.Sci.Techn.-Electrotechn. et Energ.*, 41(4):421–429, 1996.
- [4] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, **G. Preda**, and G. Rubinacci. Integral Formulation for 3D Eddy-Current Computation in Moving Bodies. *7th IGTE Symposium, Graz*, September 1996.
- [5] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, **G. Preda**, and G. Rubinacci. A Nonlinear Eddy-Current Integral Formulation for Moving Bodies. In *Proc. of the 11th COMPUMAG, Rio de Janeiro, Brazil*, November 1997.
- [6] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, **G. Preda**, and G. Rubinacci. A Nonlinear Eddy-Current Integral Formulation for Moving Bodies. *IEEE Trans. on Magn.*, 34(5):2539–2544, 1998.
- [7] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, and G. Rubinacci. Integral Formulation for Nonlinear Eddy Current Problem. In *Proc. of the 5th IGTE Symposium*, 1992.
- [8] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, and G. Rubinacci. A Nonlinear Eddy Current Integral Formulation. In *EMF Workshop*, 1994.
- [9] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, and G. Rubinacci. Eddy Current Integral Formulation for Nonlinear Media. *Rev. Roum Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ.*, 40(2):151–158, 1995.
- [10] R. Albanese, F.I. Hăntîlă, and G. Rubinacci. A Nonlinear Eddy Current Integral Formulation in Terms of a Two-Component Current Density Vector Potential. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):784–787, 1996.

- [11] R. Albanese and G. Rubinacci. Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements. *IEE. Proc.*, 135 A(7), September 1988.
- [12] R. Albanese and G. Rubinacci. Solution of Three-Dimensional Eddy Current Problems by Integral and Differential Methods. *IEEE Trans. on Magn.*, 24:98–101, 1988.
- [13] R. Albanese and G. Rubinacci. Treatment of multiply connected regions in two component electric vector potential formulation. *IEEE Trans. on Magn.*, 26(2), March 1990.
- [14] R. Albanese, G. Rubinacci, M. Canali, S. Stangherliev, A. Musolino, and M. Raughi. Analysis of a Transient Nonlinear 3-D Eddy Current Problem with Differential and Integral method. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):776–779, 1996.
- [15] D. Albertz, S. Pappan, and G. Hennenberg. Calculation of the 3D Non-Linear Eddy Current Field in Moving Conductors and its Application to Braking Systems. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):768–771, 1996.
- [16] P. Alloto, P. Molfino, M. Nervi, and P. Fernandes. Comparison of Condition $V=0$ and $A \cdot n = 0$ in A,V-A- ψ Formulation. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):800–803, May 1996.
- [17] O. Biro. Use of a Two-Component Vector Potential for 3-D Eddy Current Calculation. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):102–105, January 1988.
- [18] O. Biro and K. Preis. On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents. *IEEE Trans. on Magn.*, 25(4):3145–3159, July 1989.
- [19] O. Biro and K. Preis. Analysis of 3-D Eddy Currents. *IEEE Trans. on Magn.*, 25(2):418–423, March 1990.
- [20] O. Biro, K. Preis, and K.R. Richter. Various FEM Formulation for the Calculation of Transient 3D Eddy Currents in Nonlinear Media. *IEEE Trans on Magn.*, 31(3):1307–1312, 1995.
- [21] A. Bossavit. Calcul des courants induits et des forces electromagnetiques dans un systeme de conducteurs mobiles. In *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches*, C. E.D.F., ??
- [22] A. Bossavit. Differential Forms and the Computation of Fields and Forces in Electromagnetism. *Eur. J. Math. B. Fluids*, 10(5):474–488, 1991.
- [23] A. Bossavit and N. Richard. Lagrangian Numerical Method for the Eddy-Currents Problem in Deformable Conductors: Theory and a Case-Study. In J.S. Lee, G.A. Maugin, and Y. Shino, editors, *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, volume 161 of *AMD*, pages 161–170. ASME, 1993.
- [24] A. Bossavit and J.C. Verite. A Mixed FEM-BEM Method to solve 3D Eddy-current Problems. *IEEE Trans. on Magn.*, 18(2):431–435, March 1982.

- [25] Alain Bossavit. A Rationale for "Edge-Elements" in 3D Field Computation. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):74–79, January 1988.
- [26] F. Bouillault, Z. Ren, and A. Razek. Modelisation tridimensionnelle des courants de Foucault a l'aide des methodes mixtes avec differents formulations. *Rev. de Phys. Appl.*, 25:583–592, 1990.
- [27] M.I. Brown. Calculation of 3-dimmmensional eddy currents at power frequencies. *IEEE Proc.*, 129(1), 1982.
- [28] H.A. Calvin and S.P. Virostek. Railgun Electromagnetism. *IEEE Trans on Magn.*, 31(1):107–112, 1995.
- [29] Frank Cameron, Robert Piche, and Kimmo Forsman. Variable Step Size Integration Methods for Transient Eddy Current Problems. In *Proc. of the 11th COMPUMAG, Rio de Janeiro, Brazil*, November 1997.
- [30] J.J. Chaillout, J. Berthier, and R. Blanpaim. Modeling of Electromagnetic Wakes of Moving Submerged Bodies in Stratified Sea Water. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):998–1002, 1996.
- [31] M. Chiampi, C. ragusa, and M. Repetto. Strategies for Accelerating Convergence in Nonlinear Fixed Point Method Solutions. *7th IGTE Symposium, Graz*, September 1996.
- [32] P. C. Coles, D. Rodger, H. C. Lai, and P.J. Leonard. Scalar-Based Finite Element Modelling of 3D Eddy Currents in Thin Moving Conducting Sheets. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):733–736, 1996.
- [33] P. C. Coles, D. Rodger, H.C. Lai, and P.J. Leonard. Finite Element Modeling of 3D Moving Conductor Devices with Low Conductivity. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):733–736, 1996.
- [34] L.H. de Medeiros, G. Reyne, and G. Meunier. Comparison of global force calculation on permanent magnets. In *Proc. of the 11th COMPUMAG. Rio de Janeiro, Brazil*, pages 455–456, November 1997.
- [35] G. Drago, P.Giardinio, P. Molfino, M. Nervi, R.A. Orlando, G.L. Sabi, G. Secundo, and P. Fernandes. A Gauged A,V-A- ψ Formulation Without $A \cdot n = 0$ on Conductor Boundaries. *IEEE Trans. on. Magn.*, 30(5):2976–2979, September 1994.
- [36] C.R.I. Emson and C.W. Trowbridge. Transient 3D Eddy Current Using Modified Magnetic Vector Potentials and Magnetic Scalar Potentials. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):86–89, January 1988.
- [37] M. Enokizono, T. Tadaka, K. Yokoji, Y. Wada, and S. Matsumoto. Three-Dimmmensional Moving Simulation of Levitation-Melting Method. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(3):1869–1872, 1995.

- [38] N. Esposito, A. Musolino, and M. Raughi. Modeling of Three-D Nonlinear Eddy-Current Problems with Conductors in Motion by an Integral Formulation. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):764–768, 1996.
- [39] N. Esposito, A. Musolino, and M. Raughi. Performance of an Integral Formulation in 3D Nonlinear Anisotropic Analysis. *7th IGTE Graz Symposium*, September 1996.
- [40] Joachim Fetzer, Stefan Kurtz, Thomas Kube, Gunther Lehner, and Wolfgang M. Rucker. Transient BEM-FEM coupled analysis of 3-d electromechanical systems: A watch stepping motor driven by a thin wire coil. In *Proc. of the 11th COMPUMAG, Rio de Janeiro, Brazil*, pages 303–304, November 1997.
- [41] A. Formisano, R. Martone, and F. Villone. Lagrangian BEM-FEM Solution of Electromagnetic-Mechanical Coupled Problems. In *Proc. of the 7th International IGTE Symposium, Graz, Austria*, pages 171–176, September 1996.
- [42] K. Forsman and L. Kettunen. Hybrid Formulation for 3D Magnetostatic and Eddy Current Problems. In *Proc. of the 7th IGTE Symposium*, pages 497–501, September 1996.
- [43] N.A. Goliias and T.D. Tsiboukis. Magnetostatics with Edge Elements; A Numerical Investigation in the Choice of the Tree. *IEEE Trans. on Magn.*, 30(5), September 1994.
- [44] C. Golovanov, J.L. Coulomb, Y. Marechal, G. Meunier, and **G. Preda**. Magneto-statics using Edge Elements: MNumerical Techniques to Improve the Convergence of ICCG Solver. *1st RJJSAEM, Neptun*, September 1996.
- [45] **G. Preda** and F.I. Hăntîlă. Integral Equation for 3D Eddy-Current in Moving Bodies. *1st RJJSAEM, Neptun*, September 1996.
- [46] **G. Preda**, F.I. Hăntîlă, M. Vasiliu, and E. Demeter. Losses in Nonlinear Moving Bodies. In *Proc. of. ICEM'98, Istanbul, Turkey*, pages 147–152, September 1998.
- [47] F. I. Hăntîlă. A Method for Solving Stationary Magnetic Field in Nonlinear Media. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ.*, 20(3):397–407, 1974.
- [48] F. I. Hăntîlă. On the uniqueness theorems of the stationary and quasistationary electromagnetic fields in nonlinear media. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ.*, 20(2):211–219, 1975.
- [49] F. I. Hăntîlă and E. Demeter. *Rezolvarea numerica a problemelor de camp electromagnetic*. Ari Press, ICPE-ME, 1995.
- [50] F. I. Hăntîlă and G. Gramma. An overrelaxation method for the computation of the fixed point of a contractive mapping. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ.*, 27(4):395–398, 1982.
- [51] F.I. Hăntîlă. Mathematical Models of the relation between **B** and **H**. *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, 19(3):429–448, 1974.

- [52] F.I. Hăntilă and **G. Preda**. Formularea integrala a problemei de curenti turbionari pentru corpurile in miscare. In *Sem. Elth. Teor. Bucuresti*, April 1996.
- [53] F.I. Hăntilă, **G. Preda**, and C. Crânganu-Crețu. Integral Formulation for Eddy-Currents and Force Computation in Moving Bodies. In *Proc. of the 8th IGTE Symposium, Graz, Austria*, September 1998.
- [54] F.I. Hăntilă, **G. Preda**, M. Vasiliu, and E. Demeter. Eddy-Current Losses in Moving Bodies. In *RSEE'98, Analele Universitatii Oradea*, volume Fasc. Electrotehnica, pages 36–41, May 1998.
- [55] Kuo-Ta Hiesh. A Lagrangian Formulation for Mechanically, Thermally Coupled Electromagnetic Diffusive Process with Moving Conductors. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(1):604–609, 1995.
- [56] V. Ioniță and **G. Preda**. Evaluation of Magnetic Material Losses Produced by Hysteresis and Eddy-Currents. *IEEE Trans. on Magn.*, 34(5):2633–2635, 1998.
- [57] M. Ito, T. Takahashi, and M. Odamura. Up-wind Finite Element Solution of Travelling Magnetic Field Problems. *IEEE Trans. on Magn.*, 28(2):1605–1610, March 1992.
- [58] Wang Jialong and Tong Boqran. Calculation of 3D Eddy Current Problems Using a Modified T- Ω Method. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):114–117, January 1988.
- [59] Akihisa Kameari and Setsuo Niikura. Magnetic Force Calculation by Nodal Force Method in FEM Using Edge Elements. *IEEE Trans. on Magn.*, November 1993.
- [60] Akihisha Kameari. Three Dimmensional Eddy Current Calculation Using Finite Element Method with A-V in Conductor and Ω in Vacuum. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):118–121, January 1988.
- [61] Akihisha Kameari. Calculation of Transient 3D Eddy Current Using Edge Elements. *IEEE Trans. on Magn.*, 26(2):466–469, March 1990.
- [62] Akihisha Kameari. Local Force Calculation in 3D FEM with Edge Elements. *Int. J. Appl. Elmg. in Mat.*, 5:231–240, 1995.
- [63] Jari Kangas and Kimmo Forsman. Solutions for TEAM problem 23 (forces in permanent magnets) using an h-oriented hybrid method. In *TEAM Workshop in the Sixth Round, Rio de Janeiro*, pages 30–32, November 1997.
- [64] Hans Karl, Joachim Fetzer, Stefan Kurz, Gunter Lehner, and Wolfgang M. Rucker. Description of TEAM Workshop Problem 28: An Electrodynamic Levitation Device. In *TEAM Workshop in the Sixth Round, Rio de Janeiro*, November 1997.
- [65] K.B. Kim, Z. Zabar, E. Levi, and L. Birenbaum. In-Bore Projectile Dynamics in the Linear Induction Launcher (LIL) Part I: Oscilations. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(1):484–488, 1995.

- [66] S. Kurz, J. Fetzter, and G. Lehner. A Novel Iterative Algorithm for the Nonlinear BEM-FEM Coupling Method. *IEEE Trans. on Magn.*, 33(2):1772–1775, March 1997.
- [67] Stefan Kurz, Joachim Fetzter, Gunther Lehner, and M. Rucker. A Novel Formulation for 3D Eddy Current Problems with Moving Bodies Using a Lagrangian Description and BEM-FEM Coupling. In *Proc. of the 11th COMPUMAG, Rio de Janeiro, Brazil*, pages 417–418, November 1997.
- [68] N. Labbe, Y. Marechal, G. Meunier, and H. ben Harara. 2D Nonlinear Finite Element Modelling of Electromagnetic Retarders using Time-stepping Algorithms and the Petrov-Galerkin method with Homogenization Techniques. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):772–775, 1996.
- [69] Z. Liu, A. R. Eastham, and G.E. Dawson. Artificial Diffusion Concept for Moving Conductor Eddy Current Problems with Edge Elements. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):756–759, 1996.
- [70] B. E. MacNeal, J.R. Brauer, and N. Coppolino. A general Finite Element Vector Potential Formulation Using a Time-Integrated Electric Scalar Potential. *IEEE Trans. on Magn.*, 26(5):1768–1770, September 1990.
- [71] M.C. Marion-Pera and J.P. Yonnet. Axial bearings Using Superconductors and Permanent Magnet. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(3):2112–2114, 1995.
- [72] I. D. Mayergoyz. Boundary Galerkin approach to the calculation of eddy currents in homogenous conductors. *J. Appl. Phys.*, 55(6), March 1994.
- [73] C. I. Mocanu. *Bazele electrotehnicii, Teoria câmpului electromagnetic*. EDP, Bucharest, 1991.
- [74] K. Muramatsu, T. Nakata, N. Takahashi, and K. Fujiwara. Comparison of Coordinate Systems for Eddy Current Analysis in Moving Conductors. *IEEE Trans. on Magn.*, 28(2):1186–1189, March 1992.
- [75] K. Muramatsu, T. Nakata, N. Takahashi, and K. Fujiwara. Linear AC Steady-State Eddy Current Analysis of High Speed Conductor Using Moving Coordinate System. *IEEE Trans on Magn*, 32(3):749–752, 1996.
- [76] T. Nakata, N. Takahashi, and K. Fujiwara. Comparison of various Methods for 3D Eddy Current Analysis. *IEEE trans. on Magn.*, 24(6):3159–3161, November 1988.
- [77] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, and Y. Onada. Improvements of the T- Ω Method for 3D Eddy Current Analysis. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):94–97, January 1988.
- [78] T. Nakata, N. Takahashi, and s.a. Investigation of Effectiveness of Various Methods with Different Unknown Variables for 3D Eddy-Current Analysis. *IEEE Trans. on Magn.*, 26(2), 1990.

- [79] T. Onuki, S. Wakao, and M. Shimazaki. 3D Eddy Current Analysis by the Hybrid FE-BE Method using Magnetic Field Intensity H. *IEEE Trans. on Magn.*, 28(5):2259–2261, September 1992.
- [80] T. Onuki, S. Wakao, and T. Yoshizawa. Eddy Current Computation in Moving Conductors by the Hybrid FE-BE Method. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(3):1436–1439, 1995.
- [81] A. Panaitescu, F.I. Hăntilă, R. Enache, and **G. Preda**. BEM for Thermal Problems with Nonlinear Boundary Conditions. In *RSEE'98, Analele Universității Oradea*, May 1998.
- [82] G. Preda and F.I. Hăntilă. Integral Equation for Non-linear 3D Eddy-Current in Moving Bodies. In *Simpozionul Jubiliar Electrotehnica'6, București*, pages 3–6, December 1996.
- [83] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992.
- [84] R. Raduleț, A. Țugulea, and Al. Timotin. Teoreme de unicitate pentru regimuri variabile ale campului electromagnetic. *St. cerc. energ. electr.*, 21(1):109–128, 1971.
- [85] G. Rainsworth, D. Rodger, and P.J. Leonard. 3D Finite Element Modelling of Conducting Support Structures. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(3):2052–2055, 1995.
- [86] Z. Ren and A. Bossavit. A New Approach to Eddy Current Problems in Deformable Conductors and Some Numerical Evidence About its Validity. *Int. J. Appl. Elmg Mat.*, 3:39–46, 1992.
- [87] W. Renhart, H. Stongener, and K. Preis. Calculation of 3D Eddy Current Problems by Finite Element Method Using Either an Electric or a Magnetic Vector Potential. *IEEE Trans. on Magn.*, 24(1):122–125, January 1988.
- [88] D. Rodger, P.J. Leonard, and T. Karaguler. An Optimal Formulation for 3D Moving Conductor Eddy Current Problems with Smooth Rotors. *IEEE Trans. on Magn.*, 26(5):2359–2363, September 1990.
- [89] S.I. Salon and I.M. Schneider. A Hybrid Finite Element Boundary Integral Formulation of the Eddy Current Problem. *IEEE Trans. on Magn.*, 18(2):461–466, March 1982.
- [90] R. Shokair. Projectile Transverse Motion and Stability in Electromagnetic Induction Launchers. *IEEE Trans. on Magn.*, 31(1):504–509, 1995.
- [91] Hong Song and Nathan Ida. An Eddy Current Constraint Formulation for 3D Electromagnetic Field Computation. *IEEE Trans. on Magn.*, 27(5):4012–4015, September 1991.

- [92] Timo Tarhasaari, Aapo Koski, Kimmo Forsman, and Lauri Kettunen. Hybrid Formulation for Eddy Current Problem with Moving Objects. In *Proc. of the 11th COMPUMAG, Rio de Janeiro, Brazil*, November 1997.
- [93] C. W. Trowbridge. Computing Electromagnetic Fields for Research and Industry: major achievements and future trends. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3), 1996.
- [94] C. W. Trowbridge. Integral Equations in Electromagnetic Computation: past, present and future. In *Proc. of the 7th IGTE Symposium*, pages 733–736, 1996.
- [95] L. Urankar. Common compact analytical formulas for computation of geometry integrals on a basic cartesian sub-domain in boundary and volume integral methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 7(3), 1990.
- [96] S. Wiliamson and E.K.C. Chan. Three-dimmmensional finite element formulation for problems involving time-varying fields, relative motion and magnetic saturation. *IEEE Proc.*, 140(2), March 1993.
- [97] H.T. You, K.R. Shao, K.D. Zhou, and J.D. Lavers. Upwind-Linear Edge Elements for 3D Moving Conductor Eddy Current Problems. *IEEE Trans. on Magn.*, 32(3):760–763, 1996.
- [98] D. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, Basic Formulation and Linear Problems*. McGraw-Hill International, 1989.