5. Circuite electrice liniare în regim periodic nesinusoidal

5.1. Elemente introductive

În acest capitol se urmăreşte analizarea circuitelor electrice liniare în care semnalele de excitație aplicate au o variație în timp periodică oarecare.

Utilitatea unei astfel de analize constă în faptul că în marea majoritate a cazurilor practice circuitele electrice funcționează tocmai într-un asemenea regim, fie datorită unor semnale de excitație a căror formă de variație în timp se îndepărtează (mai mult sau mai puțin) de la o sinusoidă, fie datorită caracterului neliniar al elementelor de circuit componente (bobina cu miez de fier saturat, redresoare etc.).

Ca urmare, curenții şi tensiunile din circuit au la rândul lor o variație în timp nesinusoidală, fapt care duce de obicei la înrăutățirea funcționării echipamentelor şi instalațiilor (pierderi suplimentare de energie, supratensiuni sau supracurenți). Trebuie menționat că sunt şi situații în care un asemenea regim este produs în mod voit – este cazul unor **echipamente de telecomunicații şi automatizări**.

Trebuie precizat faptul că, dacă semnalele de excitație aplicate nu au componentă continuă, regimul permanent de funcționare al circuitului se numeşte **curent alternativ nesiunusoidal**.

5.2. Funcții periodice

Analiza circuitelor electrice liniare sau modelate prin elemente liniare se face de obicei pe baza descompunerii în serii Fourier a tensiunii electromotoare a surselor de tensiune, a intensității curentului electromotor al surselor de curent sau a tensiunii periodice aplicate la borne. Datorită liniarității circuitelor se poate aplica principiul superpoziției.

Orice funcție periodică $f(t) = f(t + kT)$ care satisface condițiile Dirichlet (este mărginită şi are un număr finit de discontinuități şi extreme pe durata T a unei perioade) poate fi descompusă într-o serie Fourier, adică într-o sumă infinită de mărimi sinusoidale având frecvențele multiplii întregi ai frecvenței de bază $f = 1/T$ a funcției.

Descompunerea respectivă conține şi un termen constant care reprezintă componenta continuă a funcției.

Seria Fourier echivalentă a funcției periodice $f(t)$ se scrie:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t) \tag{5.1}$$

În relația de mai sus, coeficienții dezvoltării se calculează cu relațiile:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t;\quad B_{km} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t;\; C_{km} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t. \quad (5.2)$$

Aceeaşi dezvoltare poate fi rearanjată sub forma:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega t + \varphi_k), \quad (5.3)$$

în care:

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2} \qquad \text{şi} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_k = \frac{B_{km}}{C_{km}}. \quad (5.4)$$

Este de menționat că, majoritatea funcțiilor întâlnite în tehnica dezvoltării în serie Fourier, se pot aproxima prin primii 3, 5, cel mult 10 termeni, aşa cum este ilustrat în figura 5.1.

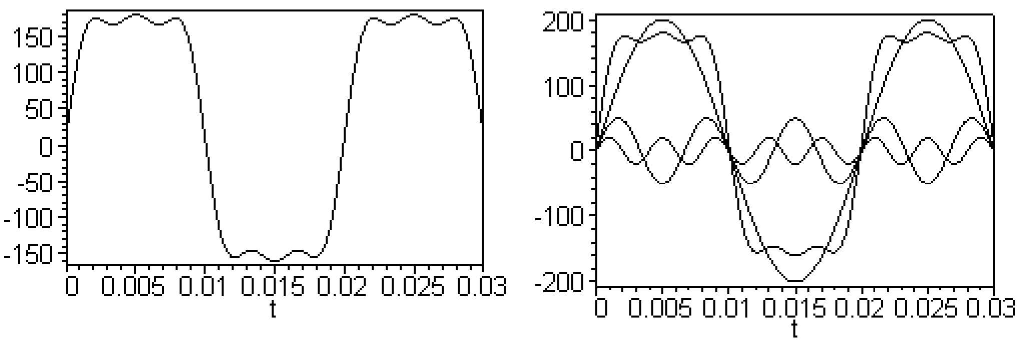


Figura 5.1

Pentru funcțiile periodice care îndeplinesc anumite proprietăți particulare de simetrie, seria Fourier corespunzătoare are unii coeficienți nuli.

Astfel:

1) **funcția alternativă** , adică funcția care are valoare medie nulă: $\langle f(x)\rangle = 0$, nu are componentă continuă: $A_0 = 0$;

2) **funcția impară**, $f(-t) = -f(t)$, nu are decât termeni în sinus în dezvoltarea de bază (5.1) : $A_0 = 0;\quad C_{km} = 0$;

3) **funcția pară,** $f(-t) = f(t)$, nu are termeni în sinus în dezvoltarea de bază dată de relația (5.1) : $B_{km} = 0$;

4) **Funcția alternativ-simetrică**, $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ nu are decât armonici impare: $A_0 = 0$; $B_{2k,m} = C_{2k,m} = 0$.

5.3. Mărimi caracteristice

Considerăm o mărime periodică $x(t)$ dezvoltată în serie Fourier de forma:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_k). \tag{5.5}$$

1) **valoarea medie** se defineşte:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{T} x(t)\,\mathrm{d}t = X_0. \tag{5.6}$$

2) **valoarea efectivă**:

$$X = \sqrt{X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} X_k^2}. \tag{5.7}$$

3) **componenta alternativă** a mărimii este definită ca valoarea efectivă a tuturor armonicilor dezvoltării:

$$X_a = \sqrt{X^2 - X_0^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}. \tag{5.8}$$

4) **reziduul deformant** este definit ca valoare efectivă a tuturor armonicilor superioare ale dezvoltării:

$$X_d = \sqrt{X^2 - X_0^2 - X_1^2} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} X_k^2} \tag{5.9}$$

5) **coeficientul de distorsiune,** definit ca raportul dintre reziduul deformant X_d şi valoarea efectivă a componentei alternative a mărimii X_a:

$$k_d = \frac{X_d}{X_a} = \sqrt{\frac{X^2 - X_0^2 - X_1^2}{X^2 - X_0^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} X_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}} \tag{5.10}$$

6) **factorul de vârf,** definit ca raportul dintre valoarea de vârf a mărimii (valoarea maximă atinsă în decursul unei perioade) $\hat{x}$ şi valoarea sa efectivă:

$$k_v = \frac{\hat{x}}{X} \tag{5.11}$$

7) **factorul de formă**, definit ca raportul dintre valoarea efectivă a mărimii şi valoarea sa medie redresată:

$$k_f = \frac{X}{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| \mathrm{d}\,t} \tag{5.12}$$

Ultimii doi factori sunt proprii funcţiilor periodice alternative şi simetrice.

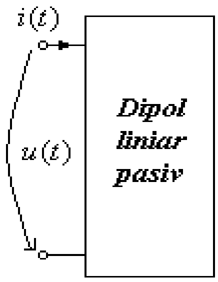
Toate mărimile mai sus definite realizează o apreciere cantitativă asupra "*calităţii*" semnalelor electrice.

Astfel, spre exemplu, în electro-energetică, o mărime sinusoidală este considerată alternativă dacă coeficientul de distorsiune $k_d \leq 5\%$.

5.4. Puteri în regim nesinusoidal

Puterile prezentate în acest regim dezvoltă puterile introduse la circuitele dipolare funcţionând în regim periodic nesinusoidal (figura 5.2).

Pentru aceasta vom considera un dipol receptor liniar, necuplat magnetic cu exteriorul ale cărui mărimi de intrare sunt:



$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_{U_k})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_{I_k}).$$

Figura 5.2

Se va nota cu $\varphi_k = \varphi_{U_k} - \varphi_{I_k}$, defazajul armonicei de ordin k a curentului faţă de armonica corespunzătoare tensiunii.

Se definesc următoarele puteri:

1) **Puterea instantanee** – indiferent de variaţia în timp a tensiunii şi a curentului, exprimată prin relaţia :

$$p(t) = u(t)i(t). \tag{5.13}$$

2) **Puterea activă** – ca şi în cazul regimului armonic permanent se defineşte cu relația:

$$P = \langle ui \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_K I_k \cos\varphi_k \quad [\mathrm{W}]. \tag{5.14}$$

Prin urmare, în regim periodic nesinusoidal puterea activă este egală cu suma puterilor active corespunzătoare tuturor armonicilor, inclusiv a celei de ordin zero (puterea de curent continuu).

3) **Puterea reactivă** – în regim periodic nesinusoidal se defineşte, prin analogie, ca suma puterilor reactive corespunzătoare tuturor armonicilor:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_K I_k \sin\varphi_k \quad [\mathrm{var}]. \tag{5.15}$$

4) **Puterea aparentă** – în regim periodic nesinusoidal se defineşte ca produsul dintre valorile efective ale curentului absorbit şi ale tensiunii aplicate dipolului:

$$S = UI = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2\right)} \quad [\mathrm{VA}]. \tag{5.16}$$

Din relațiile (5.14)-(5.16) se poate observa că, spre deosebire de regimul periodic sinusoidal în care era valabilă egalitatea: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, de această dată cele trei puteri anterior definite satisfac inegalitatea: $S > \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Acest fapt sugerează introducerea unei noi puteri specifice regimului periodic nesinusoidal – *puterea deformantă*.

5) **Puterea deformantă** – se defineşte ca un complement al puterilor activă şi reactivă în raport cu puterea aparentă:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad [\mathrm{vad}]. \tag{5.17}$$

Unitatea de măsură pentru puterea deformantă este „vad” (volt-amper deformant).

Se defineşte şi în acest regim **factorul de putere** definit ca şi în cazul regimului periodic sinusoidal ca raportul dintre puterea activă şi puterea aparentă, fiind întotdeauna subunitar.

$$k_P = \frac{P}{S} < 1. \tag{5.18}$$

Cu toate că în acest regim nu se poate defini o putere complexă care să conțină puterea activă şi reactivă, se poate face un bilanț al puterilor calculând pentru fiecare sursă de energie puterea activă si reactivă debitată (pe fiecare armonică), ea având aceeaşi valoare cu puterea (activă si reactivă) consumată (absorbită) de fiecare element pe fiecare armonică.

La armonica de ordin zero puterile sunt ca şi în curent continuu, iar pentru armonicele de ordin superior se calculează ca şi în regimul periodic sinusoidal pentru fiecare armonică în parte.

5.5. Elemente ideale de circuit în regim periodic nesinusoidal

Vom analiza pe rând comportarea elementelor ideale de circuit, presupunând aplicată la bornele lor o tensiune alternativă nesinusoidală de forma:

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k\sqrt{2}\sin(k\omega t+\alpha_k) \tag{5.19}$$

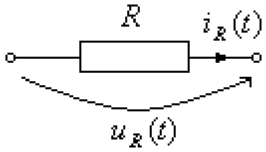
şi propunându-se determinarea curbei de variație în timp a curentului sub forma descompunerii sale în serie Fourier:

$$i(t)=\sum_{k=1}^{\infty}I_k\sqrt{2}\sin(k\omega t+\alpha_k-\varphi_k) \tag{5.20}$$

în care valorile efective I_k şi defazajele φ_k trebuie determinate pentru fiecare armonică în parte.

1) **Rezistorul ideal**.

Ecuația generală a rezistorului este : $u = Ri$



$$I_k=\frac{1}{R}U_k \qquad \varphi_k=0$$

$$I=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\frac{1}{R}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}=\frac{U}{R}$$

Prin urmare, $k_{d,i}=k_{d,u}$, ceea ce arată că intensitatea curentului şi tensiunea aplicată au aceeaşi formă de variație în timp.

Puterile consumate de rezistor vor fi:

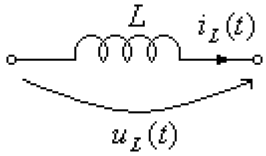
$$P=\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k=R\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2=RI^2 \quad Q=0;\ S=UI=RI^2;\ D=0 \tag{5.21}$$

Rezultatele mai sus precizate rămân valabile şi pentru cazul în care tensiunea aplicată la intrare are componentă continuă.

2) **Bobina ideală**.

Ecuația de funcționare a acesteia este:

$$i=\frac{1}{C}\int u\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k}{k\omega L}\sqrt{2}\sin\left(k\omega t+\alpha_k-\frac{\pi}{2}\right).$$



$$I_k=\frac{1}{k\omega L}U_k \qquad \varphi_k=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\frac{1}{\omega L}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k^2}{k^2}}<\frac{1}{\omega L}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}=\frac{U}{\omega L}.$$

Prin urmare $k_{d,i}<k_{d,u}$, ceea ce arată că armonicile de ordin superior ale curentului sunt mai puțin pronunțate decât cele ale tensiunii şi ca urmare însăşi forma de variație în timp a curentului este mai puțin distorsionată decât cea a tensiunii aplicate.

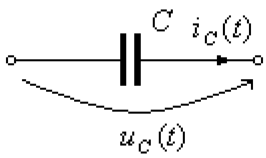
Puterile vor fi:

$$P=0;\quad Q=\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k=\omega L\sum_{k=1}^{\infty}kI_k^2;\quad S=UI=\omega L\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2\sum_{k=1}^{\infty}(kI_k)^2};$$

$$D=\sqrt{S^2-P^2-Q^2}=\omega L\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(j-k)^2I_j^2I_k^2}\neq 0. \qquad (5.22)$$

3) **Condensatorul ideal**.

Ecuația de funcționare este: $i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=C\sum_{k=1}^{\infty}k\omega U_k\sqrt{2}\sin\left(k\omega t+\alpha_k+\frac{\pi}{2}\right).$



$$I_k=k\omega CU_k \qquad \varphi_k=-\frac{\pi}{2}$$

$$I=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\omega C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(kU_k)^2}>$$

$$>\omega C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}=\omega CU.$$

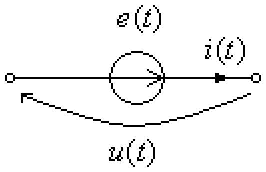
Prin urmare $k_{d,i}>k_{d,u}$ ceea ce arată că armonicile de ordin superior ale curentului sunt mai mari decât cele ale tensiunii, astfel încât condensatorul distorsionează mai puternic curba de variație a curentului în comparație cu cea a tensiunii. Puterile vor fi:

$$P=0;\qquad Q=-\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k=-\omega C\sum_{k=1}^{\infty}kU_k^2;$$

$$S=UI=\omega C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2\sum_{k=1}^{\infty}(kU_k)^2}; \qquad (5.23)$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \omega C \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(j-k)^2 U_j^2 U_k^2} \neq 0 .$$

4) **Sursa de tensiune.**



$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2}\sin(k\omega t + \varphi_{E_k})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2}\sin(k\omega t + \varphi_{I_k})$$

Puterile debitate de sursa de curent vor fi:

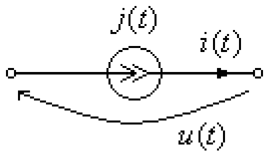
$$P_e = E_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k I_k \cos\varphi_k ,\quad Q_e = \sum_{k=1}^{\infty} E_k I_k \sin\varphi_k , S_e = EI$$

şi (5.24)

$$D_e = \sqrt{S_e^2 - P_e^2 - Q_e^2} .$$

Defazajul corespunzător armonicei de ordin *k* este $\varphi_k = \varphi_{E_k} - \varphi_{I_k}$, iar valorile efective ale tensiunii, respectiv curentului sunt $E = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} E_k^2}$ şi $I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$.

5) **Sursa de curent.**



$$j(t) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k \sqrt{2}\sin(k\omega t + \varphi_{J_k})$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2}\sin(k\omega t + \varphi_{U_k})$$

Asemănător cazului precedent, puterile debitate de sursa de curent vor fi:

$$P_j = U_0 J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k J_k \cos\varphi_k , Q_j = \sum_{k=1}^{\infty} U_k J_k \sin\varphi_k , S_j = UJ \text{ şi}$$

$$D_j = \sqrt{S_j^2 - P_j^2 - Q_j^2} ; \varphi_k = \varphi_{U_k} - \varphi_{J_k} , U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \text{ şi } J = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} J_k^2} . \qquad (5.24)$$

5.6. Rezolvarea circuitelor electrice monofazate în regim periodic nesinusoidal

Metoda cea mai frecvent folosită pentru rezolvarea circuitelor electrice liniare în regim periodic nesinusoidal este **metoda descompunerii spectrale**. Ea se bazează pe valabilitatea teoremei de superpoziție, evidentă la circuitele liniare în studiu.

Aplicarea metodei presupune parcurgerea următoarelor etape obligatorii:

1) Descompunerea în serie Fourier a mărimilor periodice ce caracterizează sursele de excitație ale circuitului.
2) Rezolvarea regimului permanent corespunzător fiecărei armonici obținute prin descompunere.
3) Pentru calculul componentei continue şi, respectiv, a armonicelor mărimilor de răspuns, se folosesc metodele de rezolvare proprii circuitelor de curent continuu (v. capitolul 2) şi, respectiv, a celor de curent alternativ sinusoidal (v. capitolul 3).
4) Exprimarea mărimilor căutate sub forma unor dezvoltări în serie Fourier, ce se obțin prin sumarea componentelor lor (**în expresie instantanee**) - rezultatele din rezolvările precedente.

De menționat că, pentru componenta continuă, elementele de circuit prezintă un comportament identic regimului staționar (curent continuu), fapt prezentat în figura 5.3.

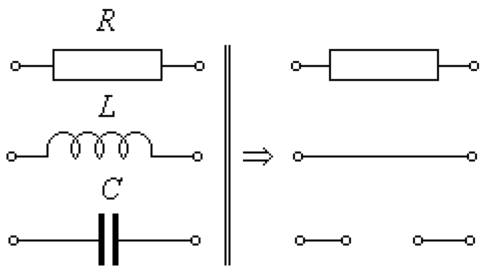


Figura 5.3