# 6. Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

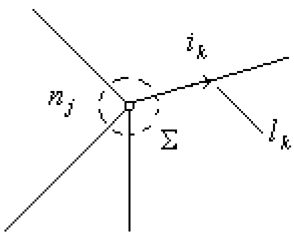
## 6.1. Teoremele lui Kirchhoff în regim variabil

Ipotezele de bază acceptate în studiul circuitelor electrice permit deducerea celor două relații fundamentale în studiul acestor circuite: *teoremele lui Kirchhoff*. În formă lor primară, aceste teoreme ilustrează proprietăți topologice generale ale circuitului.

După cum s-a arătat în capitolele precedente **prima teoremă a lui Kirchhoff** afirmă că suma algebrică a intensităților curenților $i_k$, ai laturilor $l_k$ legate la un nod $n_j$ al unui circuit este nulă.

$$\sum_{k\in(j)} i_k = 0. \tag{6.1}$$

Se vor lua cu semnul plus curenții al căror sens de referință iese din nod. Ecuația de mai sus rezultă din legea conservării sarcinii electrice aplicată pentru o suprafață închisă Σ ce înconjoară nodul $n_j$ (figura 6.1) şi din ipoteza că sarcina acumulată pe nod este nulă ($q_\Sigma$ =0), ceea ce conduce la condiția că intensitatea $i_\Sigma$ a curentului de conducție total ce iese din suprafață Σ să fie nulă.




$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_\Sigma}{\mathrm{d}t}$$

**Figura 6.1** Legea conservării sarcinii electrice.

Ca şi în cazul circuitelor electrice de curent continuu aceasta teoremă conduce la un sistem de ecuații liniar independente numai dacă se aplică la $(N-1)$ din nodurile circuitului.

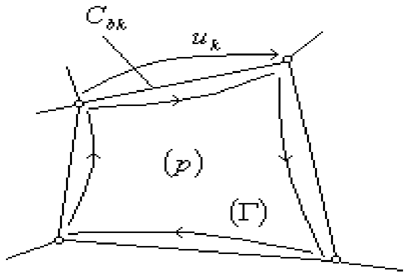
**A doua teoremă a lui Kirchhoff** pentru circuitele în regim variabil afirmă că suma algebrică a tensiunilor $u_k$ la bornele laturilor $l_k$ ce aparțin unei bucle ($p$) a unui circuit este nulă.

$$\sum_{k\in(p)} u_k = 0. \tag{6.2}$$

Se vor considera cu plus laturile al căror sens de referință coincide cu sensul de referință ales de buclă. Ecuația de mai sus rezultă din aplicarea legii inducției electromagnetice pe o curbă închisă Γ ce parcurge pe la borne toate laturile buclei ($p$) (figura 6.2) şi din ipoteza că fluxul magnetic prin orice suprafaţă exterioară eventualelor bobine de pe laturi este nul $\Phi_{S_\Gamma} = 0$, ceea ce conduce la condiţia că tensiunea electrică $u_\Gamma$, pe curba închisă $\Gamma$ să fie nulă.

În ceea ce priveşte aplicarea acestei teoreme, se observă că se preferă, pentru o mai bună sistematizare în modul de scriere a ecuaţiilor circuitului, ca tensiunea $u_k$ de la bornele laturii să fie asociată după convenţia de la receptoare cu sensul curentului din latura respectivă.

Într-un circuit cu $N$ – noduri şi $L$ – laturi, teorema a doua a lui Kirchhoff se poate aplica pentru $B = L - N + 1$ bucle independente (teorema lui Euler).




$$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t}$$

Figura 6.2

Legea inducţiei electromagnetice

## 6.2. Elementele ideale de circuit în regim variabil

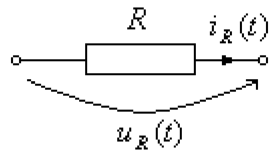
Reluăm în cele ce urmează, cu alte notaţii, caracteristicile fiecărui element de circuit şi comportamentul acestora în regim variabil. Interesează dependenţele între intensităţile curenţilor şi tensiunile la bornele laturilor.

**Rezistorul ideal** : caracteristica acestui element este dată de legea lui Ohm:

$$u_R(t) = R i_R(t)$$

sau

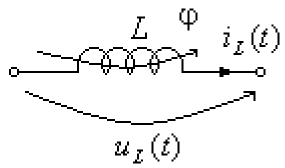
$$i_R(t) = G u_R(t).$$




**Bobina ideală fără cuplaj magnetic:** tensiunea la bornele bobinei este dată de legea inducţiei electromagnetice:

$$u_L(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau = Li_L(t)$$

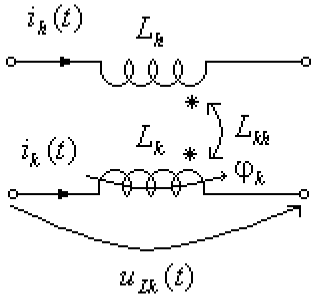
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \quad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$




**Bobina ideală cu cuplaje magnetice**: ca şi în cazul precedent, relația dintre tensiune şi curent este furnizată tot de legea inducției electromagnetice:

$$u_{Lk} = \frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}t} \quad \varphi_k = L_k i_k(t) + \sum_{h \neq (k)} L_{kh} i_h(t)$$

$$u_{Lk} = L_k \frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{h \neq (k)} L_{kh} \frac{\mathrm{d}i_h(t)}{\mathrm{d}t}.$$

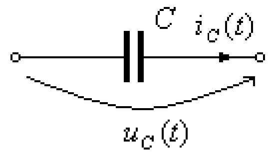



Relațiile de mai sus arată că fluxurile magnetice totale ale bobinelor trebuie să fie funcții de timp cu proprietăți de continuitate – $\varphi(0_-) = \varphi(0_+)$ – pentru ca tensiunile la borne să rămână finite. De asemenea, se observă că, în cazul bobinei necuplate magnetic, curentul prin bobină trebuie să aibă proprietăți de continuitate $i_L(0_-) = i_L(0_+)$. Aceste proprietăți vor fi utile în studiul regimului tranzitoriu.

**Condensatorul ideal**: caracteristica acestui element este dată de legea conservării sarcinii:

$$i_C(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad q(t) = q(0) + \int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = Cu_c(t)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$




Cele trei legi ale electromagnetismului mai sus menționate vor fi prezentate în cea de a doua parte a cursului, Bazele Electrotehnicii II. Ca şi în cazul bobinelor, relațiile ce exprimă funcționarea condensatorului arată că sarcina electrică a condensatorului trebuie să fie o funcție de timp cu proprietăți de continuitate $q_C(0_-) = q_C(0_+)$ – curentul rămânând astfel finit. Se poate spune că datorită ecuației sale de funcționare şi tensiunea la bornele condensatorului trebuie să aibă proprietatea de continuitate $u_C(0_-) = u_C(0_+)$.

Având în vedere cele expuse anterior, a doua teoremă a lui Kirchhoff se poate exprima şi sub o altă formă, mai utilă în aplicații curente, formă ce ia explicit în considerare structura fizică reală a laturilor circuitului.

Presupunem pentru aceasta că (în cazul cel mai general posibil), fiecare latura $k$ este alcătuită din următoarele elemente ideale: un rezistor de rezistența $R_k$, o bobină cu inductivitate $L_k$, eventual cuplată magnetic cu alte bobine ($L_{kh}$), un condensator de capacitate $C_k$ şi o sursă de tensiune electromotoare $e_k(t)$ – figura 6.3.

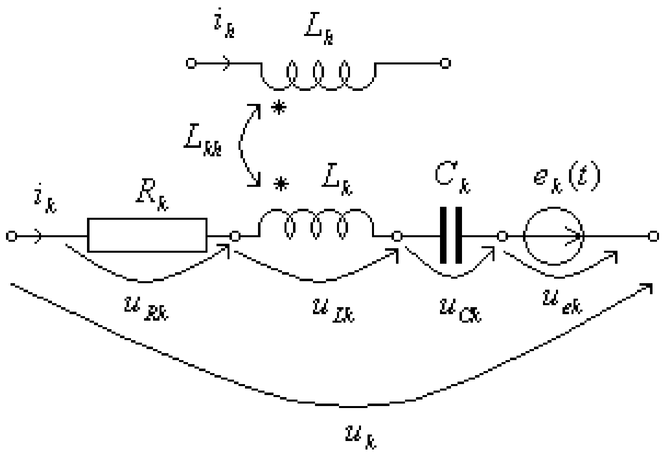



**Figura 6.3**

Înlocuind expresia tensiunii $u_k$ în expresia (6.2) se ajunge la următoarea formă echivalentă a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff.:

$$\sum_{k\in(p)}\left(R_k i_k + L_k\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{h(\neq k)} L_{kh}\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k}\int i_k\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k\in(p)} e_k(t). \tag{6.3}$$

Prin urmare suma algebrică a căderilor de tensiune pe elementele componente ale laturilor unor bucle ale circuitului este în orice moment suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor din acele laturi, toate semnele fiind stabilite prin raportarea sensurilor curenților şi tensiunilor la un sens oarecare de parcurgere a buclei ales arbitrar.

## 6.3. Ecuațiile circuitelor electrice. Problema condițiilor inițiale. Regimuri de funcționare

Comportarea oricărui circuit electric, adică modul de variație în timp a intensității curenților şi a tensiunilor la bornele diferitelor elemente componente sau laturi ale circuitelor, este complet descrisă cu ajutorul unui sistem de ecuații ce se obține prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff. Aşa cum am precizat în subcapitolele anterioare, cu ajutorul celor două teoreme se pot scrie ($N$ –1) respectiv, $B$ ecuații liniar independente, adică în total $N-1+B = L$

ecuații, în număr egal cu numărul de laturi al circuitului. În acest fel, comportarea în timp a circuitului poate fi perfect determinată prin integrarea sistemului de ecuații stabilite.

$$\sum_{k\in(j)} i_k = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,N-1$$
$$\sum_{k\in(p)}\left( R_k i_k + L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{h(\neq k)} L_{kh}\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k}\int i_k\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{k\in(p)} e_k(t),\ p = 1,2,\ldots,B. \tag{6.4}$$

În această formă de scriere a sistemului, necunoscutele sunt intensitățile curenților din cele $L$ laturi ale circuitului, iar variabila independentă este timpul. Circuitul fiind liniar, parametrii elementelor componente au valori constante, astfel încât sistemul descris de ecuațiile (6.4) este un *sistem de ecuații integro-diferențiale liniar și neomogen cu coeficienți constanți*. Observând că numai bobinele și condensatoarele introduc câte un element diferențial în ecuațiile circuitului, conform relațiilor acestora de funcționare, ordinul $n$ al sistemului de ecuații este egal cu suma dintre numărul $n_L$ de bobine și respectiv $n_C$ de condensatoare conținute de circuit, adică cu numărul total al elementelor reactive.

În cazul rețelelor liniare, prin eliminări succesive, sistemul de ecuații (6.4) se poate reduce în raport cu o funcție necunoscută $x(t)$ la o ecuație diferențială liniară neomogenă, cu coeficienți constanți, de forma:

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = y(t). \tag{6.5}$$

Coeficienții $a_0, a_1,\ldots,a_n$ depind numai de structura rețelei și au aceleași valori (până la un factor multiplicativ) pentru orice funcție necunoscută $x(t)$, a sistemului inițial, iar membrul drept $y(t)$ depinde de structura circuitului, de mărimile caracteristice ale surselor presupuse variabile în timp și de funcția necunoscută $x(t)$ în raport cu care s-a făcut eliminarea.

Conform teoriei matematice a sistemelor de ecuații diferențiale, de forma (6.5), expresia în timp a intensității fiecăruia dintre curenți $x(t)$ se scrie ca suma dintre două componente:

$$x(t) = x_l(t) + x_p(t). \tag{6.6}$$

**Prima dintre aceste componente**, $x_l(t)$, este soluția sistemului de ecuații **omogenizate**, adică pentru care s-a presupus că toate sursele existente în circuit se pasivizează $y(t) = 0$ ($e_k(t)$=0). Mărimile caracteristice ale circuitului, intensitățile curenților din laturi și tensiunile la bornele diferitelor elemente, vor fi în acest caz determinate de valorile inițiale ale unora dintre ele. Aceasta soluție se numeşte **soluție de regim liber,** şi are forma:

$$x_l(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\,\mathrm{e}^{\alpha_k t} = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\exp(\alpha_k t)\,. \tag{6.7}$$

În relația (6.7) $A_k(t),\ \ k=1,2,\ldots,n$ sunt constante de integrare, iar $\alpha_k,\ \ 1,2,\ldots,n$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice, care se obține din ecuația diferențială omogenă înlocuind formal derivata de ordin *k* a funcției necunoscute cu puterea *k* a unei necunoscute $\alpha$:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots a_1\alpha + a_0 = 0\,. \tag{6.8}$$

În ecuația (6.8) $\alpha_k$ este o rădăcină multiplă de ordinul $m_k$ . Polinoamele $A_k(t)$ sunt de ordinul ($m_k-1$) în variabila *t*, cu coeficienți reali sau complecşi. Deoarece fizic se constată că, în absența surselor, mărimile ce definesc comportarea oricărui circuit real tind să se anuleze după scurgerea unui anumit timp, rezultă că rădăcinile ecuației caracteristice îndeplinesc în mod obligatoriu condiția:

$$\Re e\{\alpha_k\} < 0\,. \tag{6.9}$$

În circuitele reale (care conțin elemente disipative–rezistente) regimul liber este un regim amortizat, care se stinge treptat pe măsură ce timpul creşte, adică:

$$\lim_{t\to\infty} x_l(t) = 0\,. \tag{6.10}$$

Soluția astfel scrisă conține un număr de constante de integrare egal cu ordinul sistemului, adică cu numărul *n* de elemente reactive ale circuitului.

**A doua componentă a soluției**, $x_p(t)$, este o soluție particulară (complet determinată) a ecuației neomogene (care are în dreapta termenul $y(t)$), numită **soluție de regim forțat**, deoarece forma ei este impusă de funcția reprezentată de termenul liber al ecuației, adică de condițiile exterioare. Dacă termenul liber este o constantă, un polinom de *t,* o exponențială sau o combinație liniară de astfel de funcții de timp, atunci soluția de regim forțat se găseşte sub forma unei funcții de timp de aceeaşi formă; parametrii soluției de regim forțat se pot determina complet prin substituție în ecuația neomogenă a formei căutate şi identificate.

Determinarea celor *n* constante de integrare se face prin referire la *condițiile inițiale ale circuitului*, adică la valorile la momentul $t = 0$ ale unora dintre mărimile sale caracteristice. Deoarece elementele reactive sunt cele care au determinat natura integro-diferențială a ecuațiilor circuitelor, condițiile cerute se vor referi la mărimile ce definesc comportarea lor.

Pentru bobină şi pentru condensatorul ideal se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L}\int u_L(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau + i_L(0) \\ u_C(t) &= \frac{1}{L}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_C(0). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Din ecuațiile (6.11) rezultă că, o dată cu specificarea exactă a originii timpului, pentru cunoaşterea la un moment $t > 0$ a intensității curentului prin bobină $i_L$ şi respectiv, a tensiunii la bornele condensatorului $u_C$, trebuie cunoscute valorile acestor mărimi la momentul $t = 0$. Ele fiind în număr de $n_{L,}$ respectivă $n_C$, se dispune astfel exact numărul de condiții necesare determinării celor $n$ constante de integrare.

Studiul circuitelor electrice în regim variabil în timp prezintă o importanță deosebită mai ales pentru faptul că permite anticiparea comportării lor în cazul în care, fie prin manevre voite (comutări, conectări sau deconectări), fie accidental (scurtcircuite, puneri la pământ, întreruperi etc.), se produc modificări bruşte în structura sau în condițiile de excitare a circuitului. În aceste cazuri, ca moment origine de timp ($t = 0$) se adoptă de obicei chiar momentul efectuării manevrei sau producerii accidentului, iar condițiile inițiale se determină impunând ca pe durata (infinit de scurtă) de punere a circuitului în noile situații de funcționare, intensitatea curentului din orice bobină şi tensiunea la bornele oricărui condensator să varieze în mod continuu:

$$\begin{aligned} i_L(0_-) &= i_L(0_+); \\ u_C(0_-) &= u_C(0_+). \end{aligned} \tag{6.12}$$

În ecuația (6.12) $0_-$, respectiv $0_+$ sunt momentele imediat anterior şi ulterior conectării considerate.

Se numeşte **regim permanent** acel regim de funcționare al circuitelor electrice în care componenta liberă a soluției (soluția liberă) este neglijabilă în raport cu cea forțată. În fapt, regimul permanent poate fi definit că fiind acea soluție asimptotică, pentru $t$ tinzând către infinit, a soluției generale dată de ecuația (6.6). Dacă termenul liber $y(t)$ este o constantă sau este o funcție periodică de timp, iar regimul liber este amortizat (se anulează când $t \to \infty$), soluția de regim forțat îşi păstrează forma la valori oricât de mari ale timpului şi se confundă cu soluția de regim permanent:

$$x(t) \to x_p(t), \quad \text{pentru} \quad t \to \infty. \tag{6.13}$$

Aceasta este situația cea mai întâlnită în practică la circuite liniare alimentate cu tensiuni constante sau periodice. În aceste circuite regimul forțat se confundă cu regimul permanent şi, de aceea, de multe ori nu se mai face distincție între aceste regimuri. Aceste cazuri particulare (excitații constante sau sinusoidale) sunt numite **regimuri staționare** (regimul permanent de curent continuu şi regimul permanent sinusoidal).

Dacă însă termenul liber nu este o constantă sau o funcție de timp periodică, atunci nu există un regim permanent al circuitului.

**Regimul tranzitoriu** este acel regim de funcționare al circuitelor electrice în care soluția liberă (naturală) are valori importante, comparabile cu cele ale soluției forțate. Pe durata sa se simte influența condițiilor inițiale de funcționare. Acest regim este determinat de situații de manevră sau de accident ce intervin în funcționarea circuitelor electrice. Regimul tranzitoriu poate fi definit că fiind regimul variabil de trecere de la o stare inițială (un regim permanent) la un alt regim permanent.

În practică, regimul tranzitoriu are o importanță destul de mare. În rețelele electrice de transport şi distribuție, toate comutațiile (deschideri sau închideri ale întrerupătoarelor) sau avariile (scurtcircuite, întreruperi de conductoare) determină regimuri tranzitorii. Regimurile tranzitorii, deşi durează puțin, datorită constantelor de timp foarte mici pot periclita securitatea instalațiilor (prin supraintensități şi supratensiuni) sau stabilitatea funcționării acestora. În electrocomunicații şi în informatică, numeroase clase de semnale (precum succesiunile de impulsuri) au variații importante în intervale de timp, variații de acelaşi ordin de mărime cu constantele de timp ale circuitelor; ele nu pot fi studiate decât în regim tranzitoriu. De asemenea, prelucrarea semnalelor (detecție, modulație, limitare etc.) utilizează procese tranzitorii care nu pot fi ignorate.

Pentru rezolvarea regimului tranzitoriu sunt cunoscute mai multe metode de rezolvare dintre care cele mai importante sunt:

**Metoda elementară a integrării directe** a sistemului de ecuații integro-diferențiale. Datorită faptului că este o metodă relativ laborioasă, aceasta metodă nu este recomandată decât în cazul unor circuite relativ simple, cu un număr redus de elemente reactive (de cele mai multe ori două).

**Metodele simbolice (operaționale),** care, pe baza unor transformări operaționale (transformata Laplace, transformata Fourier, transformata Z) simplifică apreciabil integrarea sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitului.

**Metoda variabilelor de stare** permite scrierea de ecuații ale circuitului astfel încât să apară numai variabilele legate direct de comportarea elementelor reactive de circuit. Această metodă prezintă avantajele unei remarcabile sistematizări în modul de scriere a ecuațiilor dar, fiind o metoda matricială, prezintă toate inconvenientele proprii acestui mod de calcul.

În cele ce urmează vom prezenta metoda elementară a integrării directe şi metoda operațională folosind transformata Laplace.

## 6.4. Metoda elementară de analiză a regimului tranzitoriu

Această metodă, numită şi **analiza în domeniul timp**, constă în rezolvarea directă a sistemului de ecuaţii integro-diferenţiale ale circuitului.

Cu tot avantajul abordării directe şi intuitive a studiului comportării circuitului, metoda elementară prezintă marele neajuns al unor calcule lungi şi laborioase, ceea ce o face practic inaplicabilă în cazul unor circuite având un grad cât mai ridicat de complexitate.

Metoda de rezolvare a regimului tranzitoriu are următoarele etape:

1. Se scriu ecuaţiile diferenţiale ale circuitului (care rezultă prin aplicarea sistematică a teoremelor lui Kirchhoff – sau a altor metode – şi eventual prin derivarea şi eliminarea unor necunoscute).
2. Se caută soluţia de regim tranzitoriu $x(t)$ sub forma unor sume ale soluţiilor de regim liber cu soluţiile de regim forţat (care poate fi şi soluţia de regim permanent).
3. Soluţiile de regim liber se determină cu ajutorul ecuaţiilor caracteristice, ca soluţii generale ale sistemului omogen (de exemplu, cu toate t.e.m. nule), care depind de un număr de constante arbitrare (egal sau mai mic decât numărul elementelor reactive ale circuitului). Ecuaţia caracteristică este unică pentru o reţea conexă sau formată din mai multe subreţele care se influenţează reciproc.
4. Soluţiile de regim forţat se determină ca soluţii particulare ale sistemului neomogen de formă complet determinată de termenul liber. În cazul t.e.m. constante sau sinusoidale, soluţiile forţate au aceeaşi formă că t.e.m., iar soluţiile se pot determina cu metodele folosite în regimul permanent.
5. Cu ajutorul condiţiilor iniţiale se determină constantele de integrare din expresiile complete (de regim tranzitoriu) ale soluţiilor.

Dacă circuitele au o structură mai complicată, dacă t.e.m. nu sunt constante sau periodice sau dacă se cere să se determine numai una din funcţiile necunoscute, această metodă se dovedeşte relativ laborioasă şi greu de sistematizat. Totodată condiţiile iniţiale, exprimate prin valori iniţiale ale funcţiilor cunoscute şi ale derivatelor acestora, necesită o analiză prealabilă a circuitului, pentru a stabili care dintre mărimi au proprietăţi de continuitate în momentul iniţial considerat (care în general, este un moment de discontinuitate pentru anumite mărimi, respectiv de schimbare a structurii reţelei). Mărimile care nu suferă discontinuităţi – fluxurile totale ale bobinelor (întrucât discontinuitatea lor ar determina t.e.m. induse infinite) – şi sarcinile condensatoarelor (întrucât discontinuitatea lor ar determina curenţi infiniţi) – se numesc mărimi de stare ale circuitului.

### Rezolvarea regimului tranzitoriu pentru circuite de ordin întâi

Circuitele de ordin întâi sunt circuite ce conţin un singur element reactiv, sau la care ecuaţiile care descriu funcţionarea lor se reduc la ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Acestea pot fi circuite de tip *RL* sau *RC* sau circuite reductibile la acestea.

Ecuațiile care caracterizează aceste circuite sunt, aşa cum am precizat şi în subcapitolele anterioare, ecuații diferențiale, neomogene, cu coeficienți constanți (considerăm elementele de circuit liniare).

În cazul circuitelor de ordinul întâi, acestea au forma descrisă de ecuația (6.14):

$$a\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}+bx(t)=y(t)\,. \tag{6.14}$$

Vom considera cazurile cel mai des întâlnite în practică când $y(t)$ este o funcție constantă (sursa de tensiune de curent continuu) sau o funcție sinusoidală - caz ce corespunde, de exemplu, aplicării pe circuit a unei surse de tensiune sinusoidală.

Ecuația de mai sus are o soluție de forma:

$$x(t)=x_l(t)+x_f(t)\,. \tag{6.15}$$

În care $x_l(t)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale omogene (fără termen liber), iar $x_f(t)$ este soluția forțată, ce se caută ca fiind o soluție particulară a ecuației (6.14). Deoarece circuitele vor fi reale (cu elemente disipative) soluțiile trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- **Soluția liberă** trebuie să dispară după un timp suficient de lung ($x_l(t)\to 0$, $t\to\infty$).
- **Soluția forțată** în cazul unei excitații constante sau sinusoidale, coincide după un timp suficient de lung cu soluția de regim permanent $x_f(t) = x_p(t)$, adică soluția de curent continuu sau alternativ la un timp suficient după comutație: $x_f(t) = x_p(t) = x(\infty)$.

Soluția de regim liber are următoarea formă:

$$x_l(t)=A\,\mathrm{e}^{\alpha t}=A\exp(\alpha t)\,. \tag{6.16}$$

Constanta $\alpha$ este soluția ecuației algebrice atașate ecuației diferențiale, adică este soluție a ecuației:

$$a\alpha+b=0\Rightarrow\alpha=-\frac{b}{a}=\frac{1}{\tau}\,. \tag{6.17}$$

Prin urmare, soluția de regim liber va fi:

$$x_l(t)=A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=A\exp\left(-t/\tau\right). \tag{6.18}$$

Factorul *A* reprezintă o constantă ce va fi determinată din condițiile inițiale ale circuitului, mai exact din condițiile de continuitate ale fluxului prin bobine, respectiv ale sarcinilor prezente în condensatoare.

Având în vedere că soluția de regim forțat este soluția după un timp îndelungat de la comutație (în noua topologie a circuitului), vom obține soluția finală ca în (6.19):

$$x(t) = A\exp\left(-t/\tau\right) + x(\infty)\,. \tag{6.19}$$

În momentul $t = 0$ se cunoaşte condiția inițială $x(0)$; prin urmare constanta $A$ va fi egală cu diferența dintre valoarea inițială şi valoarea finală a variabilei de stare $x$ (care este fie tensiunea pe condensator fie curentul prin bobine). Prin urmare soluția va fi:

$$x(t) = \left(x(0) - x(\infty)\right)\exp\left(-t/\tau\right) + x(\infty)\,. \tag{6.20}$$

Termenul notat cu τ poartă numele de **constantă de timp a circuitului**. Această mărime este o foarte bună măsură a "inerției electrice" a circuitului, adică a promptitudinii cu care circuitul este capabil să urmărească variațiile semnalului de excitație care i se aplică. În general, comportarea dinamică este cu atât mai bună cu cât constanta de timp este mai mică, în fapt cu cât elementele disipative au valori mai ridicate.

Constanta de timp a circuitului dă şi o măsură a duratei regimului tranzitoriu; astfel, se poate observa din (6.20) că, după un interval de timp egal cu 3τ, valoarea mărimii diferă cu circa 5% față de valoarea sa de regim permanent şi aceasta pentru că la momentele 5τ, respectiv 10τ, diferența sa scade la numai 0,67% respectivă 0,04 %. Prin urmare, se poate spune cu o foarte bună aproximare că, după un timp egal cu de trei ori constanta de timp a circuitului, regimul tranzitoriu este încheiat.

Acesta este aşadar cea mai simplă metodă de a rezolva circuitele ce conțin un singur element reactiv.

Deseori se întâlnesc circuite de tipul *RL* sau *RC* (figura 6.4) în diverse tipuri de configurații la care putem aplica direct relația (6.20); pentru aceste circuite cărora le aplicăm o excitație constantă, în condiții inițiale nule obținem următoarea soluție:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right)$$

$$u_L(t) = E\exp\left(-t/\tau\right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

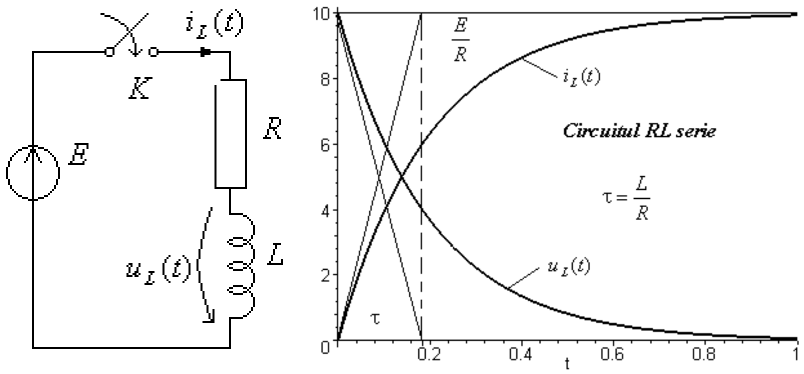



**Figura 6.4,a**

Similar, vom obține şi pentru cazul circuitului *RC*:

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$
$$u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right)$$
$$i_C(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-t/\tau\right)$$
$$\tau = RC.$$

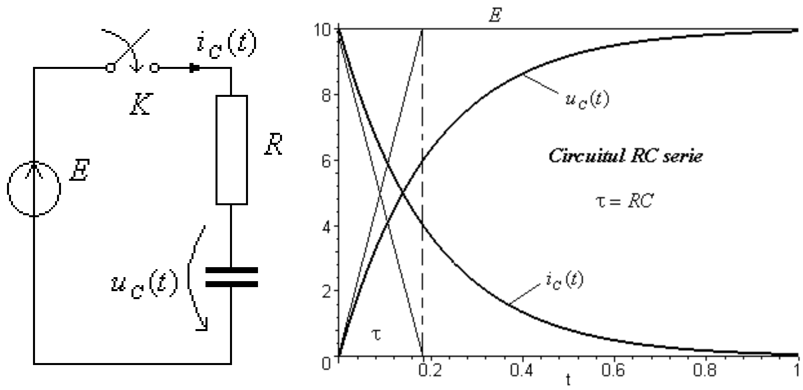



**Figura 6.4,b**

Aşa cum se observă şi din variaţiile în timp ale mărimilor caracteristice fiecărui tip de circuit în parte, constanta de timp are şi o interpretate grafică, ea fiind egală cu subtangenta în punctul de comutaţie la graficul de variaţie al mărimii respective. De fapt, constanta de timp va fi calculată pentru circuitele de tip *RL* ca raport dintre inductivitate şi rezistenţa electrică echivalentă "văzută" de inductivitate la bornele ei, respectiv la circuitele de tip *RC*, ca şi produs dintre capacitate şi rezistenţa electrică echivalentă "văzută" de condensator la bornele sale.

Dacă la bornele unui circuit *RL*, de exemplu, se aplică o tensiune sinusoidală de tipul $e(t) = E\sin\omega t$, răspunsul circuitului va fi asemănător reprezentării grafice din figura 6.5.

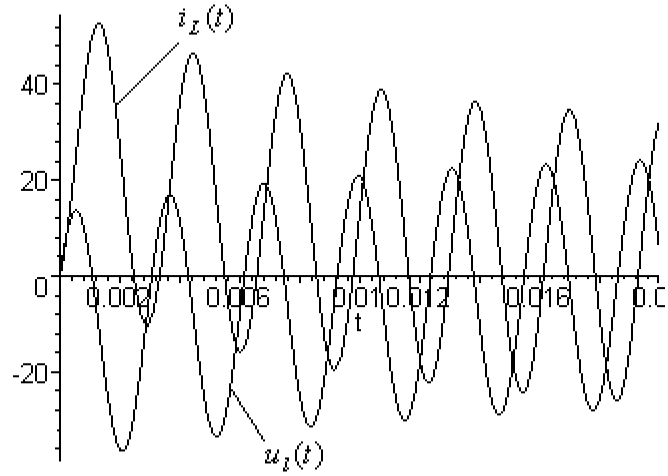



**Figura 6.5**

În acest caz, valorile curentului şi a tensiunii prin bobină variază după legile:

$$
\begin{aligned}
& i_L(t) = I_0\left[\exp(-t/\tau)\sin\varphi + \sin(\omega t - \varphi)\right] \\
& u_L(t) = E\sin\varphi\left[\exp(-t/\tau)\cos\varphi + \cos(\omega t - \varphi)\right] \\
& I_0 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},\ \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}.
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

**Observații**

În practică, o importanță tehnică deosebită o are comutația bobinelor şi a condensatoarelor.

- Astfel în cazul deschiderii unui **circuit *RL*** variația foarte rapidă spre zero a intensității curentului electric poate induce o t.e.m. (cădere inductivă de tensiune) suficient de mare pentru a favoriza producerea unui arc electric între contactele întrerupătorului. Acest lucru prezintă pericolul străpungerii izolației bobinei sau accidentării operatorului, iar pe termen lung poate duce la distrugerea contactelor. De cele mai multe ori neajunsul se înlătura evitând întreruperea bruscă a curentului prin bobină, iar atunci când acest lucru nu este posibil, se leagă în derivație cu bobină o rezistența de valoare foarte mare, prin care se închide curentul generat de t.e.m. autoindusă la deschiderea circuitului. La instalațiile electrice şi pe liniile electrice de mare putere, unde montarea unor asemenea rezistențe nu este posibilă, aparatele pentru întreruperea curentului sunt prevăzute cu dispozitive speciale pentru întreruperea arcului electric iar manipularea lor se face numai de la distanță.

- În cazul **circuitelor *RC***, la încărcarea condensatoarelor, dacă rezistența este destul de mică, apar curenți de intensitate foarte ridicată care pot periclita atât termic cât şi electrodinamic securitatea instalațiilor. Din acest motiv, bateriile mari de condensatoare au rezistoare sau alte dispozitive pentru limitarea curentului de încărcare. Dacă după încărcarea unui condensator se deschide întrerupătorul, condensatorul rămâne încărcat la tensiunea (eventual înalta) la care era încărcat înainte de deschiderea întrerupătorului un timp îndelungat. Din aceasta cauză este indicat, pentru a se evita pericolul de electrocutare, că acest condensator să fie descărcat folosind rezistențe de valoare ridicată. În caz contrar el se va descărca foarte lent, numai prin rezistența dielectricului, proces ce poate dura şi câteva zile.

### Rezolvarea regimului tranzitoriu pentru circuite de ordin doi

Aceste circuite sunt circuitele electrice care conțin două elemente reactive (de regulă bobină şi condensator) iar ecuația de caracterizare a acestora este o ecuație diferențială neomogenă cu coeficienți constanți de ordinul doi având forma celei din relația (6.21).

$$a\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+cx(t)=y(t) \tag{6.21}$$

Soluția acestei ecuații este compusă din **soluția de regim liber** şi **soluția forțată**.

Soluția forțată se determină, ca fiind o soluție particulară a ecuației diferențiale generale. Ea va trebui găsită (de cele mai multe ori ca o soluție de regim permanent) ca o soluție a ecuației după ce regimul tranzitoriu a încetat (adică după un timp suficient de lung ca efectele acestuia să nu mai poată fi percepute). În practică se consideră că toate derivatele sunt nule, determinând-se astfel o soluție pentru regimul forțat.

Soluția de regim liber are forma:

$$x_l(t)=A_1\exp(\alpha_1 t)+A_2\exp(\alpha_2 t)\,. \tag{6.22}$$

În ecuația (6.22) termenii $A_1$, respectiv $A_2$, se determină din condițiile de continuitate ale fluxului din bobină şi ale sarcinii de pe condensator:

$$\begin{aligned} q_C(0_+)&=q_C(0_-)\\ \Phi_L(0_+)&=\Phi_L(0_-). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Parametrii $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ sunt soluțiile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale omogene, adică sunt soluțiile ecuației:

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0\,. \tag{6.24}$$

Având în vedere caracterul realist al majorității circuitului, pentru ca soluția să fie stabilă trebuie ca ambele soluții ale ecuației de mai sus să aibă partea reală negativă. În funcție de aceste două rădăcini se disting mai multe regimuri ale soluției de regim liber deci, implicit, ale soluției de regim tranzitoriu:

- Dacă rădăcinile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale omogene **sunt reale** ($\alpha_1,\alpha_2\in \boldsymbol{R}$), atunci :
  - Dacă ele sunt diferite ($\alpha_1\neq\alpha_2$) atunci avem **regim aperiodic (supraamortizat)**.
  - Dacă ele sunt egale ($\alpha_1=\alpha_2$) atunci avem **regim aperiodic critic**.
- Dacă rădăcinile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale omogene **sunt complexe** ($\alpha_1,\alpha_2\in \boldsymbol{C}$), atunci :
  - Dacă există elemente disipative (cazul real) avem regim **oscilatoriu amortizat**.
  - Dacă nu există elemente disipative (cazul teoretic) avem regim **oscilatoriu neamortizat**.

Pentru un studiu mai simplificat, dar şi pentru a pune în evidență câteva fenomene calitative, vom considera în cele ce urmează un circuit simplu *RLC*

serie (figura 6.6) căruia i se aplică la un moment $t = 0$ o tensiune continuă constantă $E$. Intenţionăm să determinăm la această excitaţie funcţie de parametrii acestuia $R$, $L$ şi $C$.
Ecuaţia caracteristică acestui circuit este:

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E. \tag{6.22}$$

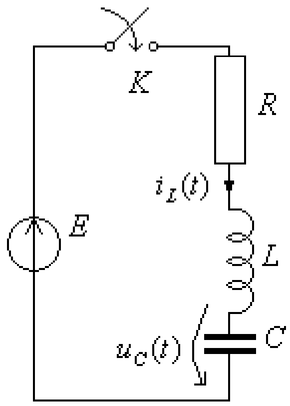



**Figura 6.6**

Soluţiile ecuaţiei algebrice ataşate ecuaţiei diferenţiale (6.22) sunt:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad \text{unde} \quad \delta = \frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \tag{6.23}$$

Prin urmare soluţia generală are forma :

$$u_C(t) = u_{Cl}(t) + u_{Cf}(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t) + E. \tag{6.24}$$

Condiţiile iniţiale se determină cu relaţiile:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \tag{6.25}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

a) **Regimul liber oscilatoriu amortizat**

Dacă $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ se notează cu $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, iar rădăcinile ecuaţiei caracteristice vor fi complexe conjugate:

$$\alpha_1 = -\delta + \mathrm{j}\omega \quad \alpha_2 = -\delta + \mathrm{j}\omega. \tag{6.26}$$

În acest caz $\delta$ se numeşte constantă de atenuare a oscilaţiilor libere de amortizare, $\omega_0$ – este pulsaţia oscilaţiilor libere neamortizate, iar $\omega$ – pulsaţia oscilaţiilor libere amortizate ale circuitului.

După stabilirea condiţiilor iniţiale soluţia de regim tranzitoriu capătă forma:

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{1}{\sin k}\exp(-\delta t)\sin(\omega t + k)\right), \tag{6.27}$$

în care s-a notat:

$$\sin k = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{6.28}$$

Curentul prin circuit este:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{L\omega}\exp(-\delta t)\sin\omega t. \tag{6.29}$$

În figura 6.7 s-a reprezentat variația în timp a curentului prin bobină.

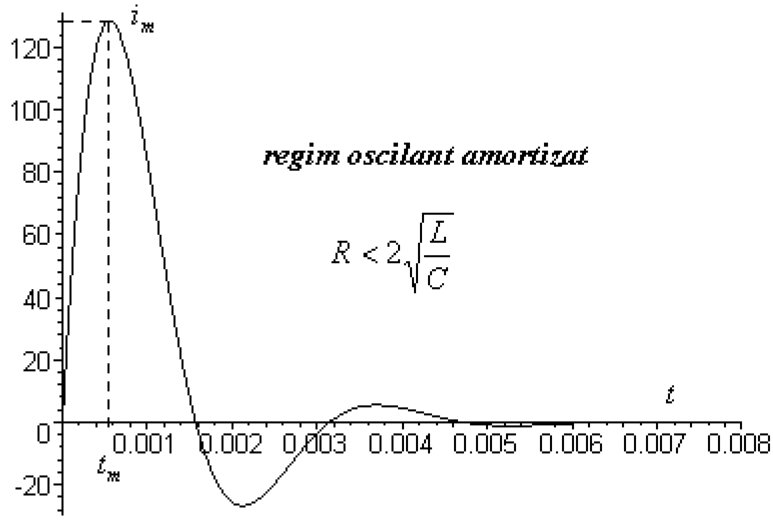



**Figura 6.7**

Timpul după care curentul capătă valoarea maximă şi valoarea acestui maxim este:

$$t_m = \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad i_m = \frac{E}{\omega L}\exp(-\delta t_m)\sin\omega t_m,$$

$$\text{unde } x = \sqrt{m^2 - 1}, \quad \text{iar } m = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} > 1. \tag{6.30}$$

Panta de creştere a curentului în primul moment este: $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L}$. Deci în primul moment toată tensiunea se aplică bobinei ideale, iar inductivitatea acesteia determină panta inițială a curentului.

**b) Regimul liber oscilatoriu neamortizat**

Acest regim se obține în cazul ideal dacă circuitul nu conține elemente nedisipative: $R$=0.

În acest caz se determină uşor relaţiile:

$$u_C(t) = E(1 - \cos\omega_0 t) \tag{6.31}$$

$$i_L(t) = \frac{E}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t.$$

Timpul după care curentul ajunge la valoarea maximă, precum şi această valoare, sunt uşor de determinat:

$$t_m = \frac{\pi}{2\omega_0} \quad i_m = \frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}}}. \tag{6.32}$$

În mod evident acest regim este pur teoretic deoarece în realitate după un timp foarte lung de la comutaţie oscilaţiile libere ale mărimilor se vor stinge. Totuşi această situaţie poate fi regăsită într-o destul de bună aproximaţie în cazul în care parametrii elementelor reactive sunt destul de mari în comparaţie cu valoarea rezistenţei ohmice a circuitului. În electrotehnică acest regim este în general evitat datorită instabilităţii răspunsului dat de circuit. Se spune că acesta nu oferă o soluţie asimptotică.

Variaţia în timp a curentului în acest caz este dată în figura 6.8.

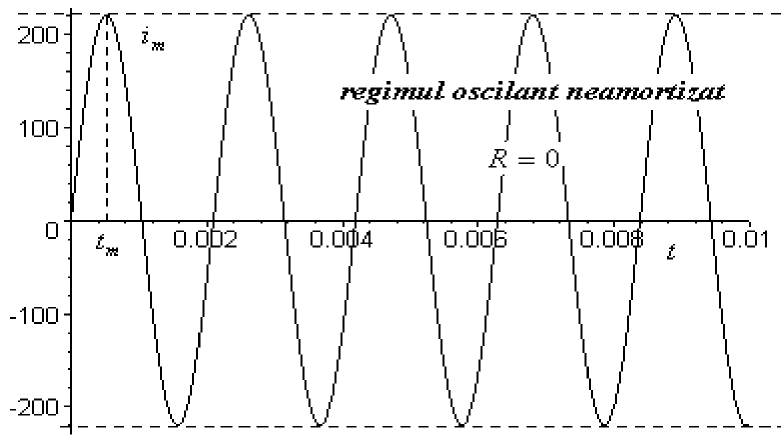



**Figura 6.8**

c) **Regimul liber aperiodic (supraamortizat)**

Acest regim este întâlnit atunci când este îndeplinită inegalitatea $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$. În acest caz ecuaţia caracteristică are două rădăcini reale negative:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \beta \quad \text{unde} \quad \delta = \frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad \beta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{6.33}$$

Soluţia poate fi dedusă observând că $\beta = j\omega$. Folosind relaţiile dintre funcţiile trigonometrice de argument imaginar şi funcţiile hiperbolice, se stabilesc următoarele expresii:

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{1}{\operatorname{sh} k'}\exp(-\delta t)\operatorname{sh}(\omega t + k')\right). \tag{6.34}$$

În care s-au notat:

$$\sin k = \frac{\beta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{R^2 C}{4L} - 1} \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{6.35}$$

Curentul circuitului este:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L\beta}\exp(-\delta t)\operatorname{sh}\beta t. \tag{6.36}$$

Timpul după care curentul capătă valoarea maximă şi valoarea acestui maxim este (figura 6.9):

$$\begin{gathered} t_m = \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{arcth} x}{x} \quad i_m = \frac{E}{\beta L}\exp(-\delta t_m)\operatorname{sh}\beta t_m \\ \text{unde } x = \sqrt{1 - m^2}, \quad \text{iar } m = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < 1. \end{gathered} \tag{6.37}$$

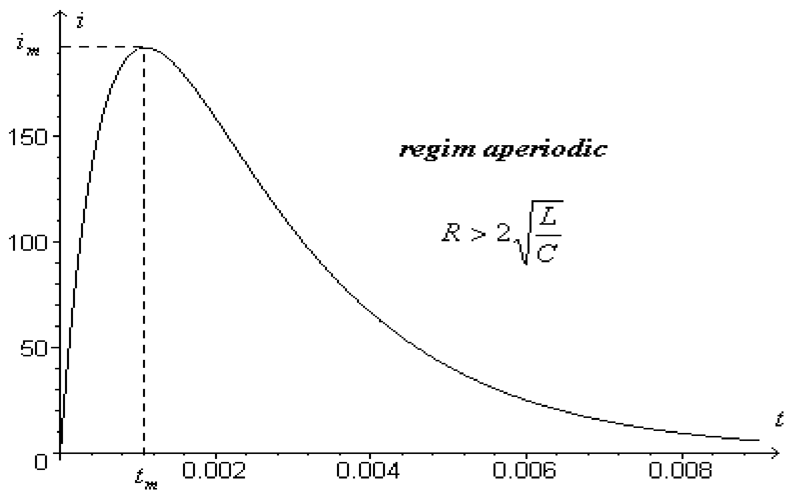



**Figura 6.9**

d) **Regimul liber aperiodic critic**

Regimul apare $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$. În acest caz ecuația caracteristică are o rădăcină dublă egală cu –δ. Soluția se poate deduce direct din relația (6.27) prin trecere la limita $(\omega \to \delta \quad \omega \to 0)$. Rezultă :

$$u_C(t) = E(1 + (1 + \delta t)\exp(-\delta t)) \tag{6.38}$$
$$i_L(t) = \frac{E}{L} t \exp(-\delta t).$$

Variația în domeniul timp a curentului prin circuit va avea graficul de variație asemănător celui prezentat în figura 6.10.

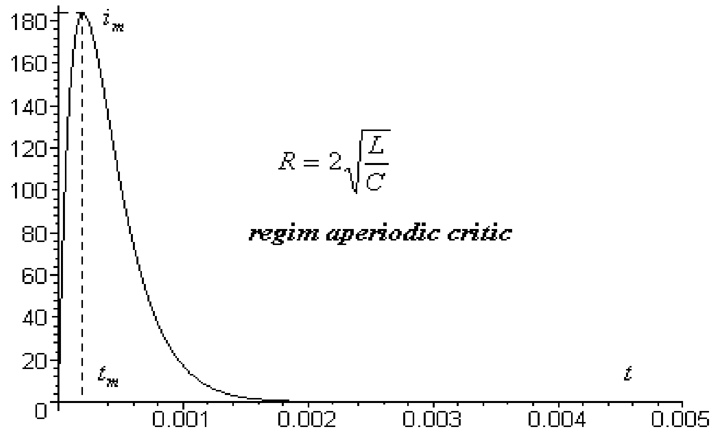



**Figura 6.10**

Timpul după care curentul atinge valoarea maximă şi valoarea acestui maxim este:

$$t_m = \frac{1}{\delta} \quad i_m = \frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-1}. \tag{6.39}$$