1.4 PROBLEME REZOLVATE

1.1.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 1.1.R-a, în care se cunosc $E_1= E_2 =E_3$=6V, J=2A, $R_1=R_4$=1Ω, R_2=1/2Ω, R_3=2/3Ω.

Să se determine valoarea intensității curentului electric prin rezistența R_4 folosind metoda transfigurărilor electrice.

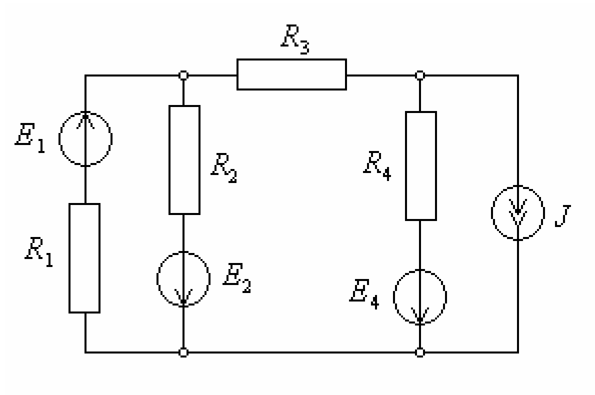

Fig. 1.1.R-a

Pentru a putea determina valoarea intensității curentului electric prin rezistența R_4 va trebui să reducem schema la un singur circuit electric ce conține rezistorul respectiv.

Pentru a realiza acest lucru vom folosi teoremele de echivalență dintre generatoarele de tensiune şi curent, precum şi relațiile de conexiune dintre rezistențele electrice.

Astfel, laturile ce conțin E_1 şi R_1, respectiv E_2 şi R_2, pot forma o singură sursă de tensiune E_{12} în serie cu o singură rezistență R_{12} care la rândul său este înseriată cu o rezistență R_3 aşa cum se poate observa din figurile Fig. 1.1.R-b, respectiv Fig. 1.1.R-c:

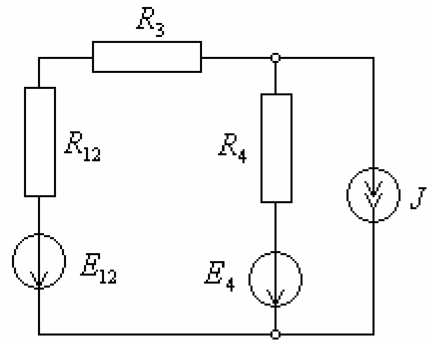

Fig. 1.1.R-b

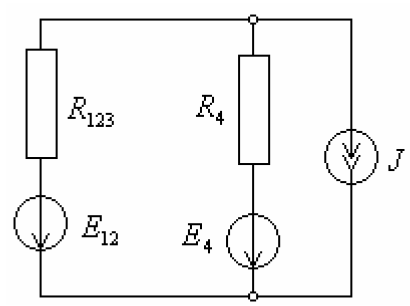

Fig. 1.1.R-c

În baza relațiilor de echivalență a surselor reale de tensiune şi a conexiunii rezistențelor, vom avea:

$$E_{12} = \frac{E_2 R_1 - E_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2\ \mathrm{V} \quad R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}\,\Omega \quad R_{123} = R_{12} + R_3 = 1\,\Omega$$

În cele ce urmează vom echivala sursa de curent aflată în conexiune paralel cu latura ce conține sursa E_{12} şi rezistența R_{12} cu o sursă de tensiune conform teoremelor de echivalență (ilustrată în Fig. 1.1.R-d) obținând astfel circuitul echivalent din Fig. 1.1.R-e.

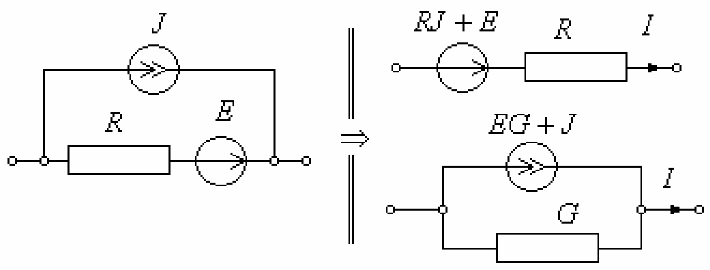

Fig. 1.1.R-d

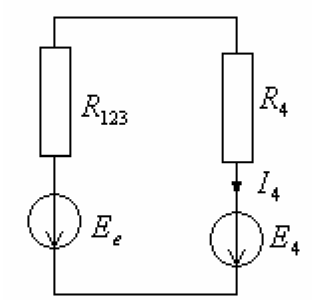

Fig. 1.1.R-e

Prin urmare, valoarea intensității sursei de energie va fi $E_e = R_{123} J + E_{12} = 4\ \mathrm{V}$.

În aceste condiții valoarea intensității curentului electric căutat va fi, în baza schemei echivalente dată de Fig. 1.1.R-e:

$$I_4 = \frac{E_4 - E_e}{R_4 + R_{123}} = 6\ \mathrm{A}$$

1.2.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 1.2.R-a, în care se cunosc E_4=100V, E_5 =160V, J=10A, R_2=R_5=20Ω, R_3=R_4=10Ω, R_6=30Ω.

Se cer:

a) Să se scrie ecuațiile corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff.
b) Să se determine intensitățile curenților prin laturile circuitului folosind metoda curenților de contur (ciclici).
c) Să se verifice bilanțul puterilor.
d) Să se calculeze tensiunea U_{BD} între punctele B şi D pe două căi diferite şi să se arate că nu depinde de “drum”.
e) Să se rezolve circuitul utilizând metoda potențialelor la noduri.
f) Să se determine elementele generatoarelor echivalente de tensiune şi curent între punctele B şi D ale circuitului.
g) Determinați curentul prin rezistorul R_6 folosind teorema lui Thevenin.
h) Ce valoare ar trebui să aibă rezistența R_6 pentru ca puterea absorbită de aceasta să fie maximă ? Care ar fi puterea maximă transferată în acest caz?

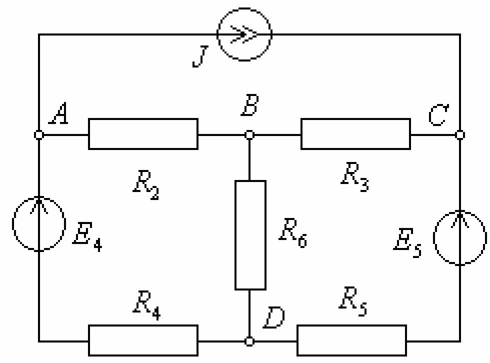

Fig.1.2.R-a

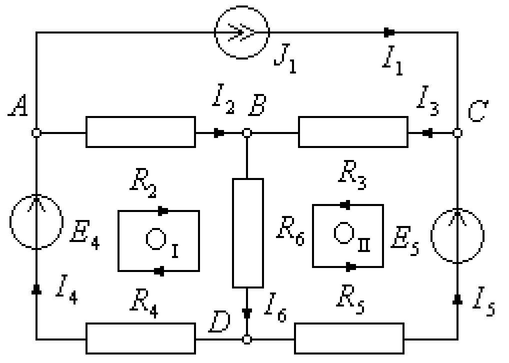

Fig.1.2.R-b

Circuitul prezintă N= 4 noduri şi L= 6 laturi.

Prin urmare vom avea N-1=3 ecuaţii prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff.

Ar trebui să avem şi L-N+1 =3 ecuaţii pentru teorema a doua a lui Kirchhoff, dar datorită faptului că circuitul prezintă şi N_J =1, o sursă ideală de curent, ecuaţiile corespunzătoare teoremei a doua a lui Kirchhoff vor fi numai două (L-N+1-N_J=2).

Prin urmare I_1=J=10 A.

Am ales în mod arbitrar sensul de parcurgere al curentului prin fiecare latură precum şi sensul de parcurgere al celor două bucle obţinând:

$$\text{Kirchhoff I: } \begin{cases} (A) & I_4 - I_2 - J = 0 \\ (B) & I_2 + I_3 - I_6 = 0 \\ (C) & I_5 + J - I_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{Kirchhoff II } \begin{cases} (\mathrm{O_I}) & E_4 = R_2 I_2 + R_6 I_6 + R_4 I_4 \\ (\mathrm{O_{II}}) & E_4 = R_3 I_3 + R_6 I_6 + R_5 I_5 \end{cases}$$

Ecuaţiile de mai sus reprezintă un sistem de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute compatibil determinat ce are ca soluţii curenţii prin laturile circuitului exceptând curentul I_1 a cărui intensitate este J.

Numeric se obţin următoarele valori:

$$I_1 = 10\text{A}; \quad I_2 = -4\text{A}; \quad I_3 = 8\text{A}; \quad I_4 = 6\text{A}; \quad I_5 = -2\text{A}; \quad I_6 = 4\text{A}$$

Metoda curenţilor ciclici

Pentru a aplica metoda curenţilor ciclici avem mai întâi sensurile curenţilor de contur ca în Fig 1.2.R-c:

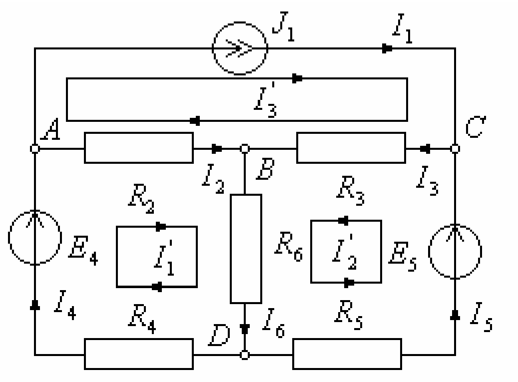

Fig.1.2.R-c Metoda curenților ciclici.

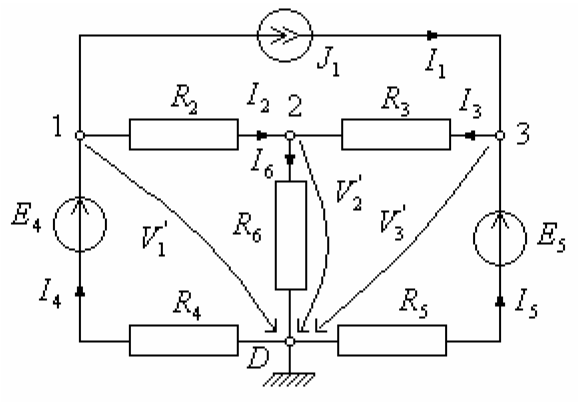

Fig.1.2.R-d Metoda potențialelor la noduri

Ecuațiile prin această metodă vor fi:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^{'} + R_{12}I_2^{'} + R_{13}I_3^{'} = E_1^{'} \\ R_{21}I_1^{'} + R_{22}I_2^{'} + R_{23}I_3^{'} = E_2^{'} \\ R_{31}I_1^{'} + R_{32}I_2^{'} + R_{33}I_3^{'} = E_3^{'} \end{cases}$$

Deoarece $R_{33} = \infty$, ultima ecuație din sistemul de mai sus se înlocuieşte cu $I_3^{'} = J = 10\text{A}$.

Având în vedere sensurile alese pentru curenții ciclici (Fig.1.2.-c) vom avea:

$$R_{11} = R_2 + R_6 + R_4 = 60\ \Omega; \quad R_{12} = R_{21} = R_6 = 30\ \Omega; \quad R_{13} = R_{31} = -R_2 = -20\ \Omega;$$
$$R_{22} = R_3 + R_5 + R_6 = 60\ \Omega; \quad R_{23} = R_{32} = R_3 = 10\ \Omega;$$
$$E_1^{'} = E_4 = 100\ \text{V}; \quad E_2^{'} = E_5 = 160\ \text{V}.$$

Cu aceste valori se obține sistemul:

$$\begin{cases} 60I_1^{'} + 30I_2^{'} - 200 = 100 \\ 30I_1^{'} + 60I_2^{'} + 100 = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1^{'} = 6\ \text{A} \\ I_2^{'} = -2\ \text{A} \end{cases} I_3^{'} = 10\text{A}$$

Alegem curenții reali prin circuit ca în Fig.1.2.R-c pe care determinăm în funcție de curenții ciclici :

$$I_1 = I_3^{'} = 10\text{A}; \quad I_2 = I_1^{'} - I_3^{'} = -4\text{A}; \quad I_3 = I_2^{'} - I_3^{'} = 8\text{A};$$
$$I_4 = I_1^{'} = 6\text{A}; \quad I_5 = I_2^{'} = -2\text{A}; \quad I_6 = I_1^{'} + I_2^{'} = 4\text{A}.$$

Bilanțul puterilor

Pentru a putea efectua bilanțul puterilor trebuie să cunoaştem tensiunea la bornele sursei de curent U_g care reprezintă tensiunea între punctele *A* şi *C*.

Putem determina această tensiune aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe traseul *ABCA*, astfel:

$$U_g + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_g = 160\text{V}$$

Puterea consumată (absorbită), respectiv debitată (generată):

$$\begin{aligned} P_c &= R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 1880\text{W} \\ P_d &= E_4 I_4 + E_5 I_5 + U_g J = 1880\text{W} \end{aligned}$$

Cum $P_c = P_d$, ecuația de bilanț a puterilor este satisfacută.

Tensiunea între punctele B şi D.

Vom calcula tensiunea între punctele *B* şi *D* pe căile *ABDA,* respectiv *CBDC,* folosind a doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned} &(ABDA) \quad E_4 = R_2 I_2 + U_{BD} + R_4 I_4 \Rightarrow U_{BD} = E_4 - R_2 I_2 - R_4 I_4 = 120\text{V} \\ &(ABDA) \quad E_5 = R_3 I_3 + U_{BD} + R_5 I_5 \Rightarrow U_{BD} = E_5 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = 120\text{V} \end{aligned}$$

Se obține aceeaşi valoare pentru tensiune, indiferent de calea aleasă pentru calculul acesteia.

Metoda potențialelor la noduri

Alegând ca potențial de referință nodul *D* (Fig.1.2.R-d) vom avea:

$$\begin{cases} G_{11} V_1^{'} + G_{12} V_2^{'} + G_{13} V_3^{'} = I_{sc1}^{'} \\ G_{21} V_1^{'} + G_{22} V_2^{'} + G_{23} V_3^{'} = I_{sc2}^{'} \\ G_{31} V_1^{'} + G_{32} V_2^{'} + G_{33} V_3^{'} = I_{sc3}^{'} \end{cases}$$

În care $V_1^{'}; V_2^{'}; V_3^{'}$ reprezintă potențialele electrice ale nodurilor 1, 2 şi 3 față de nodul de referință *D*.

Conductanțele vor fi:

$$G_{11}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{\infty}=\frac{3}{20}\text{S};\quad G_{12}=G_{21}=-\frac{1}{R_2}=\frac{1}{20}\text{S};\quad G_{13}=G_{31}=-\frac{1}{\infty}=0\text{S};$$

$$G_{22}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}=\frac{11}{60}\text{S};\quad G_{23}=G_{32}=-\frac{1}{R_3}=-\frac{1}{10}\text{S};$$

$$G_{33}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}=\frac{3}{20}\text{S}$$

$$I'_{sc1}=-J+\frac{E_4}{R_4}=0\text{A};\quad I'_{sc2}=0\text{A};\quad I'_{sc3}=J+\frac{E_5}{R_5}=18\text{A}.$$

Se va obține sistemul de ecuații în care necunoscutele reprezintă potențialele nodurilor 1, 2 şi 3 $V'_1;V'_2;V'_3$.

$$\begin{cases}\frac{3}{20}V'_1-\frac{1}{20}V'_2=0\\ -\frac{1}{20}V'_1+\frac{11}{60}V'_2-\frac{1}{10}V'_3=0\\ -\frac{1}{20}V'_2+\frac{3}{20}V'_3=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V'_1=40\text{V}\\ V'_2=120\text{V}\\ V'_3=200\text{V}\end{cases}$$

Curenții prin fiecare latură se determină aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe fiecare latură cunoscându-se potențialele între care este cuprinsă fiecare latură:

$$I_1=J=10\text{A};\quad I_2=\frac{V'_1-V'_2}{R_2}=-4\text{A};\quad I_3=\frac{-V'_2+V'_3}{R_3}=8\text{A};$$

$$I_4=\frac{E_4-V'_1}{R_4}=6\text{A};\quad I_5=\frac{E_5-V'_3}{R_5}=-2\text{A};\quad I_6=\frac{V'_2}{R_6}=4\text{A}$$

Se poate obține acum mult mai uşor tensiunea la bornele sursei de curent $U_g=V'_3-V'_3=160\text{V}$.

Se pot prezenta grafurile curenților şi tensiunilor pentru circuitul dat (Fig.1.2.R-e):

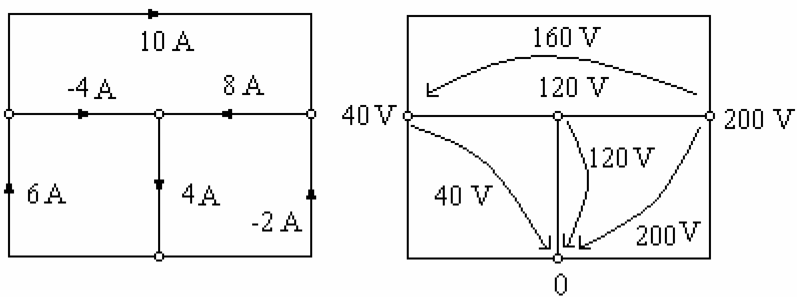

Fig.1.2.R-e. Grafurile curenților şi tensiunilor.

<u>Generatoarele echivalente între punctele B şi D.</u>

Pentru a putea determina elementele generatoarelor echivalente între punctele B şi D va trebui mai întâi să deteminăm tensiunea între cele două puncte.

Acesta este simplu de apreciat din relația:

$$U_{BD} = R_6 I_6 = V_2' - 0 = 120\text{V}$$

Rezistența echivalentă a circuitului între punctele B şi D se determină prin pasivizarea circuitului Fig.1.2.R-f.

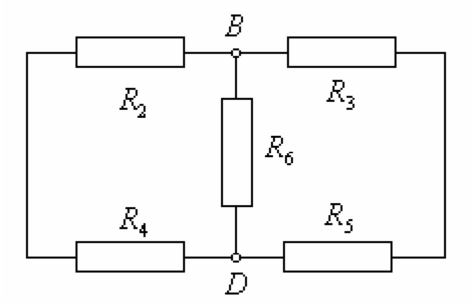

Fig.1.2.R-f

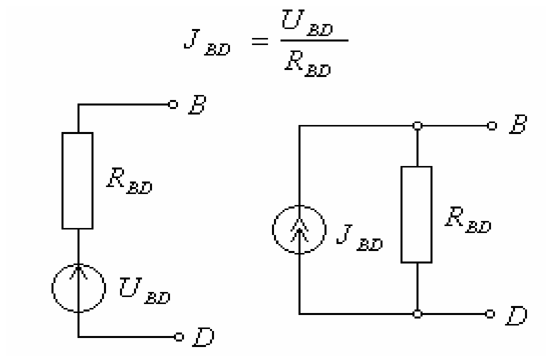

Fig.1.2.R-g

Rezistența echivalentă este prin urmare dată de conexiunea paralel dintre: grupul R_2, R_4 conectate în serie, grupul R_3, R_5 conectate în serie şi rezistența R_6.

R_{BD} va fi:

$$R_{BD} = \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3 + R_5} + \frac{1}{R_6} = 10\,\Omega$$

Generatorul echivalent de tensiune va fi compus dintr-o sursă de tensiune de valoare $U_{BD} = 120\text{V}$ în serie cu o rezistență $R_{BD} = 10\,\Omega$.

Generatorul echivalent de curent este compus dintr-o sursă de curent de valoare $J_{BD} = U_{BD} / R_{BD} = 12\text{A}$, în paralel cu rezistența $R_{BD} = 10\,\Omega$.

<u>Valoarea curentului prin R_6 utilizând teorema lui Thevenin</u>

Pentru a determina curentul prin rezistența R_6 folosind această metodă va trebui să eleminăm din schema circuitului rezistența R_6 determinând generatorul echivalent de tensiune între punctele B şi D pentru noul circuit format (tensiunea U_{BD0}, respectiv R_{BD0}).

Apoi în baza teoremei lui Thevenin se determină curentul căutat.

Circuitul după eleminarea rezistenței R_6 va deveni (Fig.1.2.R-h):

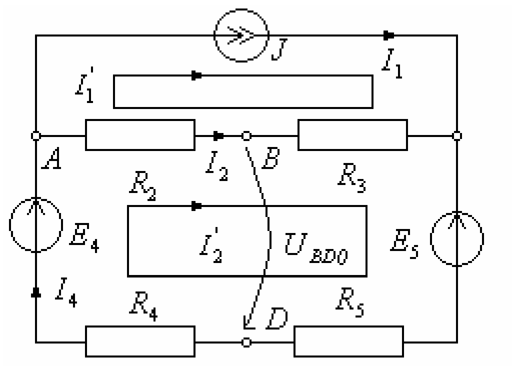

Fig.1.2.R-h

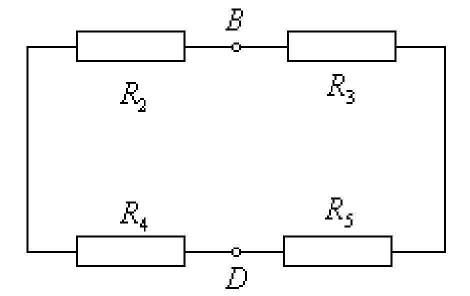

Fig.1.2.R-i

Pentru a determina tensiunea U_{BD0} trebuie mai întâi determinați curenții I_2si I_4deoarece curentul $I_1 = J = 10\text{A}$.

Având în vedere noua structură a circuitului, o metodă foarte ușoară de rezolvare a circuitului o reprezintă metoda curenților ciclici în care avem doar două bucle şi un curent ciclic cunoscut $I_1' = J = 10\text{A}$:

$$\begin{cases} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' = E_1' \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' = E_2' \end{cases}$$

Prima ecuație este echivalentă cu $I_1' = J = 10\text{A}$

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 60\Omega$ $\quad R_{21} = R_{12} = -(R_2 + R_3) = -30\Omega$ $\quad E_2' = E_4 - E_5 = -60\text{V}$

Soluția sistemului este $I_1' = 10\text{A}$; $I_2' = 4\text{A}$.

Deci, curenții reali prin laturile circuitului, având sensurile alese ca în Fig.1.2.R-h vor fi: $I_1 = I_1' = 10\text{A}$; $I_2 = I_2' - I_1' = -6\text{A}$ $\quad I_4 = I_2' = 4\text{A}$.

Putem calcula tensiunea U_{BD0} aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff pe traseul $ABDA$:

$$E_4 = R_2 I_2 + U_{BD0} + R_4 I_4 \Rightarrow U_{BD0} = E_4 - R_2 I_2 - R_4 I_4 = 180\text{V}$$

Rezistența echivalentă R_{BD0} reprezintă rezistența circuitului pasivizat între punctele B şi D.

Aşa cum se poate observa din Fig.1.2.R-i ea se compune din conexiunea paralel a gruprurilor de rezistențe R_2 şi R_4 respectiv R_3 şi R_5 aflate în serie.

$$R_{BD0} = \frac{(R_2 + R_3)(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_2 + R_3} = 15\Omega$$

Prin urmare, generatorul de tensiune între punctele B şi D este format din generatorul de tensiune de valoare U_{BD0} în serie cu rezistenţa R_{BD0}.

Pentru a determina curentul prin rezistenţa R_6 vom conecta această rezistenţă la bornele generatorului format: Fig.1.2.R-j.

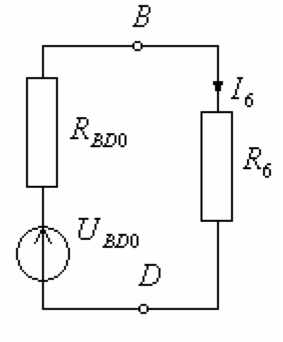

Fig.1.2.R-j

$$I_6 = \frac{U_{BD0}}{R_{BD0} + R_6} = 4\text{A}$$

Prin urmare valoarea intensităţii curentului ce străbate rezistenţa R_6 este aceeaşi cu cea determinată prin celelalte metode. Este deci o verificare a justeţii acestei valori.

Transferul maxim de putere

Transferul maxim de putere se obţine conform teoremei de transfer maxim a puterii, în cazul în care valoarea rezistenţei R_6 are aceeaşi valoare ca şi rezistenţa R_{BD0}, adică în momentul în care $R_6 = R_{BD0} = 15\Omega$.

În acest caz, curentul prin rezistenţă va fi: $I_0 = \dfrac{U_{BD0}}{2R_{BD0}} = 6\text{A}$, iar puterea este $P_{\max} = R_{BD0} I_0^2 = \dfrac{U_{BD0}^2}{4R_{BD0}} = 540\text{W}$.

1.3.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 1.3.R-a, în care se cunosc E_4=10V, E_5= E_6=9V, J=1A, R_1=R_2=R_3= R_4= R_5= R_6=1Ω. Se cer:

a) Să se scrie ecuaţiile corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff.
b) Să se determine intensităţile curenţilor prin laturile circuitului folosind metoda curenţilor de contur (ciclici).
c) Să se verifice bilanţul puterilor.
d) Să se calculeze tensiunea U_{AC} între punctele A şi C pe două cai diferite şi să se arate că nu depinde de "drum".
e) Să se rezolve circuitul utilizând metoda potenţialelor la noduri.
f) Să se determine elementele generatoarelor echivalente de tensiune şi curent între punctele A şi B ale circuitului.
g) Determinaţi curentul prin rezistorul R_1 folosind teorema lui Thevenin.
h) Ce valoare ar trebui să aibă rezistenţa R_1 pentru ca puterea absorbită de aceasta să fie maximă ? Care ar fi puterea maximă transferată în acest caz ?

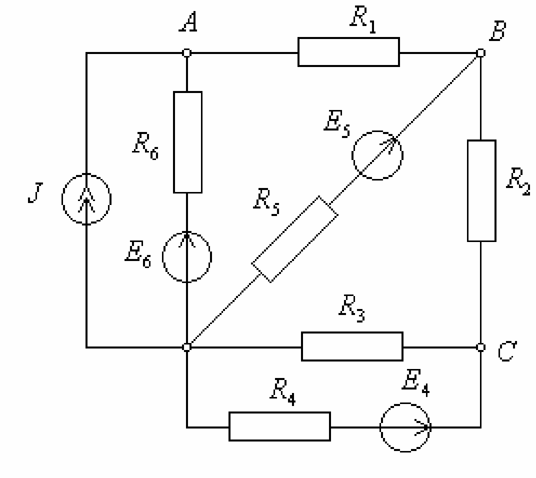

Fig.1.3.R-a

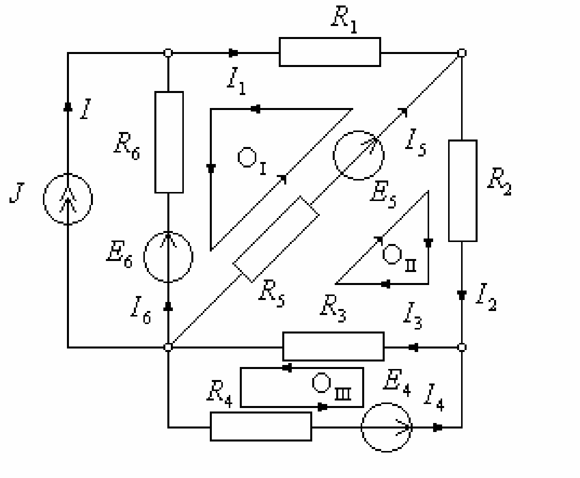

Fig.1.3.R-b

Circuitul prezintă *N*= 4 noduri şi *L*= 7 laturi.

Prin urmare vom avea *N*-1=3 ecuații prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff.

Ar trebui să avem şi L-N+1 =4 ecuații pentru teorema a doua a lui Kirchhoff, dar datorită faptului că circuitul prezintă şi N_J =1, o sursă ideală de curent, ecuațiile corespunzătoare teoremei a doua a lui Kirchhoff vor fi numai două (L-N+1-N_J=3).

Prin urmare, *I*=*J*=10 A.

Am ales în mod arbitrar sensul de parcurgere al curentului prin fiecare latură precum şi sensul de parcurgere al celor două bucle obținând (Fig.1.3.R-b):

Kirchhoff I: $\begin{cases} (A) & J + I_6 - I_1 = 0 \\ (B) & I_1 + I_5 - I_2 = 0 \\ (C) & I_4 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$ Kirchhoff II $\begin{cases} (\mathrm{O_I}) & E_5 - E_6 = R_5 I_5 - R_1 I_1 - R_6 I_6 \\ (\mathrm{O_{II}}) & E_5 = R_5 I_5 + R_2 I_2 + +R_3 I_3 \\ (\mathrm{O_{III}}) & E_4 = R_4 I_4 + R_3 I_3 \end{cases}$

Ecuațiile de mai sus reprezintă un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute compatibil determinat ce are ca soluții curenții prin laturile circuitului exceptând curentul *I* a cărui intensitate este *J*.

Numeric se obțin următoarele valori:

$$I_1 = 1\text{A}; \quad I_2 = 2\text{A}; \quad I_3 = 6\text{A}; \quad I_4 = 4\text{A}; \quad I_5 = 1\text{A}; \quad I_6 = 0\text{A} \quad I = 1\text{A}$$

<u>*Metoda curenților ciclici*</u>

Pentru a aplica metoda curenților ciclici avem mai întâi sensurile curenților de contur ca în Fig 1.3.R-c:

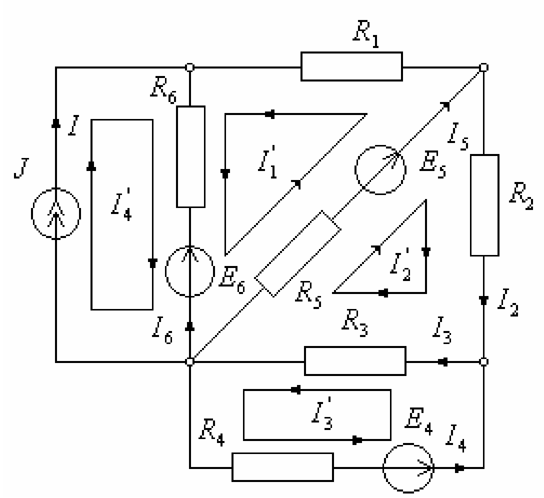

Fig.1.3.R-c Metoda curenților ciclici.

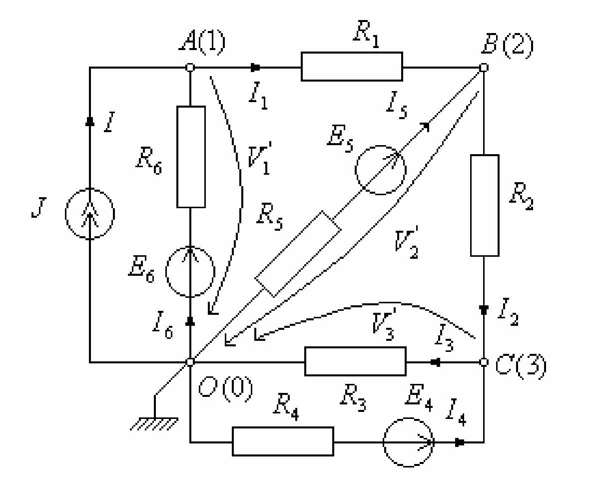

Fig.1.3.R-d Metoda potențialelor la noduri

Ecuațiile prin această metodă vor fi:

$$\begin{cases} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' + R_{13}I_3' + R_{14}I_4' = E_1' \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' + R_{23}I_3' + R_{24}I_4' = E_2' \\ R_{31}I_1' + R_{32}I_2' + R_{33}I_3' + R_{34}I_4' = E_3' \\ R_{41}I_1' + R_{42}I_2' + R_{43}I_3' + R_{44}I_4' = E_4' \end{cases}$$

Deoarece $R_{44} = \infty$, ultima ecuație din sistemul de mai sus se înlocuieşte cu $I_4' = J = 1\text{A}$. Având în vedere sensurile alese pentru curenții ciclici (Fig.1.3.-c) vom avea:

$R_{11} = R_2 + R_5 + R_6 = 3\,\Omega$; $R_{12} = R_{21} = R_5 = 1\,\Omega$; $R_{13} = R_{31} = 0\,\Omega$; $R_{14} = R_{41} = R_6 = 1\,\Omega$
$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5 = 3\,\Omega$; $R_{23} = R_{32} = R_3 = 1\,\Omega$; $R_{24} = R_{42} = 0\,\Omega$;
$R_{33} = R_3 + R_4 = 2\,\Omega$; $R_{34} = R_{43} = 0\,\Omega$
$E_1' = E_5 - E_6 = 0\text{ V}$; $E_2' = E_5 = 9\text{ V}$; $E_3' = E_4 = 10\text{ V}$.

Cu aceste valori se obține sistemul:

$$\begin{cases} 3I_1' + I_2' + 1 = 0 \\ I_1' + 3I_2' + I_3' = 9 \\ I_2' + 2I_3' = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1' = -1\text{ A} \\ I_2' = 2\text{ A} \;\; I_4' = 1\text{A} \\ I_3' = 4\text{A} \end{cases}$$

Alegem curenții reali prin circuit ca în Fig.1.3.R-c pe care determinăm în funcție de curenții ciclici :

$$I_1 = -I_1^{'} = 1\text{A}; \quad I_2 = I_2^{'} = 2\text{A}; \quad I_3 = I_2^{'} + I_3^{'} = 6\text{A};$$
$$I_4 = I_3^{'} = 4\text{A}; \quad I_5 = I_1^{'} + I_2^{'} = 1\text{A}; \quad I_6 = I_1^{'} + I_4^{'} = 0\text{A}; \quad I = I_4^{'} = 1\text{A}$$

<u>Bilanţul puterilor</u>

Pentru a putea efectua bilanţul puterilor trebuie să cunoastem tensiunea la bornele sursei de curent U_g care reprezintă tensiunea între punctele A şi 0.

Putem determina acestă tensiune aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff, astfel:

$$E_6 = R_6 I_6 + U_g \Rightarrow \quad U_g = E_6 - R_6 I_6 = 9\text{V}$$

Puterea consumată (absorbită), respectiv debitată (generată):

$$P_c = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 58\text{W}$$
$$P_d = E_4 I_4 + E_5 I_5 + E_6 I_6 + U_g J = 58\text{W}$$

Cum $P_c = P_d$, ecuaţia de bilanţ a puterilor este satisfacută.

Tensiunea între punctele A şi C.

Vom calcula tensiunea între punctele *B* şi *D* pe căile *AOCA,* respectiv *ABCA,* folosind a doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$(AOCA) \quad E_6 = R_6 I_6 + U_{AC} + R_3 I_3 \Rightarrow U_{BD} = E_6 - R_6 I_6 - R_3 I_3 = 3\text{V}$$
$$(ABCA) \quad 0 = R_1 I_1 + +R_2 I_2 - U_{BD} \Rightarrow U_{BD} = R_1 I_1 + R_2 I_2 = 3\text{V}$$

Se obţine prin urmare aceeaşi valoare pentru tensiune indiferent de calea aleasă pentru calculul acesteia.

<u>Metoda potenţialelor la noduri</u>

Alegând ca potenţial de referinţă nodul *O* (Fig.1.3.R-d) vom avea:

$$\begin{cases} G_{11} V_1^{'} + G_{12} V_2^{'} + G_{13} V_3^{'} = I_{sc1}^{'} \\ G_{21} V_1^{'} + G_{22} V_2^{'} + G_{23} V_3^{'} = I_{sc2}^{'} \\ G_{31} V_1^{'} + G_{32} V_2^{'} + G_{33} V_3^{'} = I_{sc3}^{'} \end{cases}$$

În care $V_1^{'}; V_2^{'}; V_3^{'}$ reprezintă potenţialele electrice ale nodurilor 1, 2 şi 3 faţă de nodul de referinţă *D*.

Conductanţele corespunzătoare vor fi:

$$G_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{\infty}=2\text{S};\quad G_{12}=G_{21}=-\frac{1}{R_1}=-1\text{S};\quad G_{13}=G_{31}=-\frac{1}{\infty}=0\text{S};$$

$$G_{22}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}=3\text{S};\quad G_{23}=G_{32}=-\frac{1}{R_2}=-1\text{S};$$

$$G_{33}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=3\text{S}$$

$$I'_{sc1}=J+\frac{E_6}{R_6}=10\text{A};\quad I'_{sc2}=\frac{E_5}{R_5}=9\text{A};\quad I'_{sc3}=\frac{E_4}{R_4}=10\text{A}.$$

Se va obține sistemul de ecuații în care necunoscutele reprezintă potențialele nodurilor 1, 2 şi 3 $V'_1;V'_2;V'_3$.

$$\begin{cases}2V'_1-V'_2=10\\-V'_1+3V'_2-V'_3=9\\-V'_2+3V'_3=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V'_1=9\text{V}\\V'_2=8\text{V}\\V'_3=6\text{V}\end{cases}$$

Curenții prin fiecare latură se determină aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe fiecare latură cunoscându-se potențialele între care este cuprinsă fiecare latură:

$$I_1=\frac{V'_1-V'_2}{R_1}=1\text{A};\quad I_2=\frac{V'_2-V'_3}{R_2}=2\text{A};\quad I_3=\frac{V'_3}{R_3}=6\text{A};$$

$$I_4=\frac{E_4-V'_3}{R_4}=4\text{A};\quad I_5=\frac{E_5-V'_2}{R_5}=1\text{A};\quad I_6=\frac{E_6-V'_1}{R_6}=0\text{A}\quad I=J=1\text{A}$$

Se poate obține acum mult mai uşor tensiunea la bornele sursei de curent $U_g=V'_1=9\text{V}$.

Se pot prezenta grafurile curenților şi tensiunilor pentru circuitul dat (Fig.1.2.R-e):

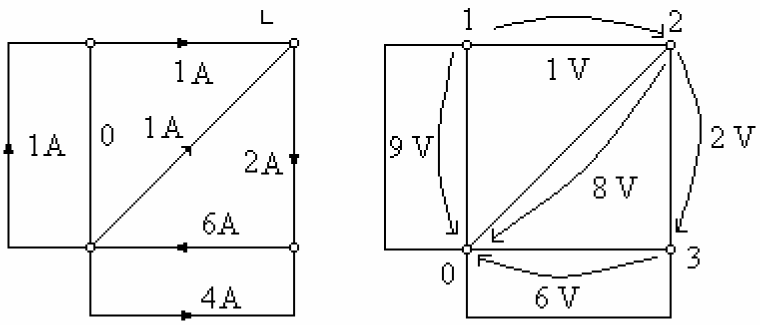

Fig.1.2.R-e. Grafurile curenților şi tensiunilor.

Generatoarele echivalente între punctele A şi B.

Pentru a putea determina elementele generatoarelor echivalente între punctele *A* şi *B* va trebui mai întâi să determinăm tensiunea între cele două puncte.

Acest lucru se poate aprecia din relaţia:

$$U_{AB} = R_1 I_1 = V_1' - V_2' = 1\text{V}$$

Rezistenţa echivalentă a circuitului între punctele *B* şi *D* se determină prin pasivizarea circuitului Fig.1.3.R-f.

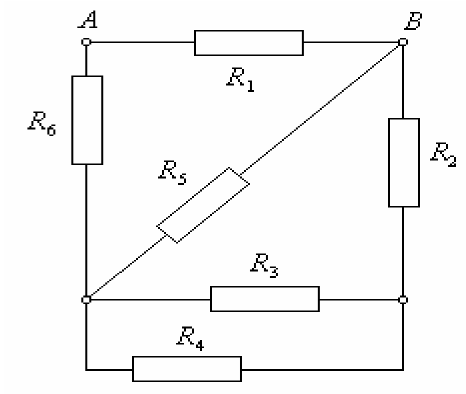

Fig.1.2.R-f

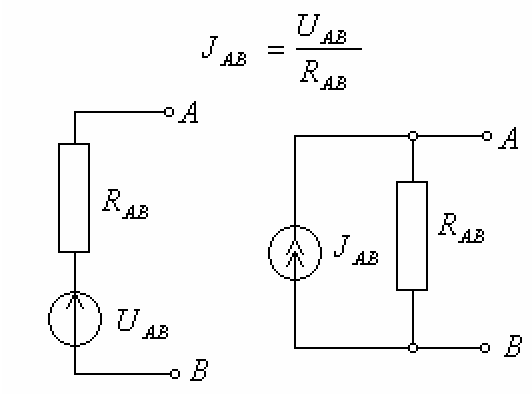

Fig.1.2.R-g

Rezistenţa echivalentă este dată de conexiunea paralel dintre R_3, R_4 notată cu R_{34} , în serie cu R_2 formând astfel R_{234}, care se află în paralel cu R_5 alcătuind rezistenţa R_{2345}; aceasta se află în serie cu R_6. Tot ansamblul este în paralel cu R_1.

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{1}{2}\,\Omega; \quad R_{234} = R_{34} + R_2 = \frac{3}{2}\,\Omega$$

$$R_{2345} = \frac{R_{234} R_5}{R_{234} + R_5} = \frac{3}{5}\,\Omega \quad R_{23456} = R_{2345} + R_6 = \frac{8}{5}\,\Omega$$

$$R_{AB} = \frac{R_{23456} R_1}{R_{23456} + R_1} = \frac{8}{13}\,\Omega$$

Generatorul echivalent de tensiune va fi compus dintr-o sursă de tensiune de de valoare $U_{AB} = 120\text{V}$ în serie cu o rezistenţă $R_{AB} = 8/13\,\Omega$.

Generatorul echivalent de curent este compus din o sursă de curent de valoare $J_{AB} = U_{AB}/R_{AB} = 13/8\,\text{A}$, în paralel cu rezistenţa $R_{BD} = 8/13\,\Omega$.

Valoarea curentului prin R_1 utilizând teorema lui Thevenin

Pentru a determina curentul prin rezistenţa R_1 folosind această metodă, va trebui să eleminăm din schema circuitului rezistenţa R_1 determinând generatorul echivalent de tensiune între punctele *A* şi *B* pentru noul circuit format (tensiunea U_{AB0} respectiv R_{AB0}).

Apoi în baza teoremei lui Thevenin se determină curentul căutat.

Circuitul, după eleminarea rezistenţei R_1, va deveni (Fig.1.2.R-h):

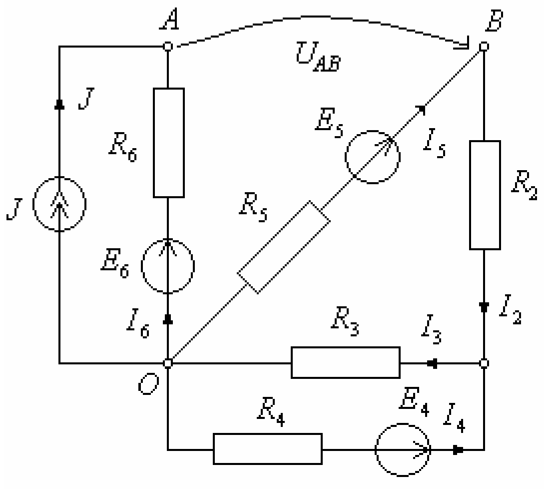

Fig.1.3.R-h

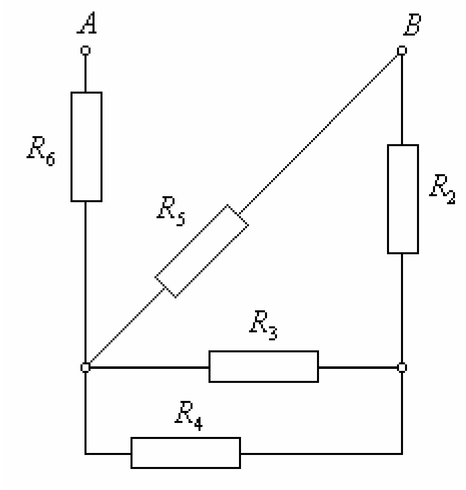

Fig.1.3.R-I

Pentru a determina tensiunea U_{AB0} trebuie să determinăm curentul I_5 (curentul $I_6 = -J = -10\text{A}$ pentru cazul de față) apoi aplicând teorema lui Kirchhoff pe traseul *ABOA* putem evalua cu ușurință tensiunea căutată.

Având în vedere noua structură a circuitului, o metodă foarte ușoară de determinare a curentului I_5, este metoda transfigurărilor electrice.

Putem forma un generator echivalent de tensiune format de E_4 și R_4 în paralel cu rezistența R_3, care este conectat în serie cu E_4, R_4 și R_2.

Se poate determina apoi ușor valoarea curentului I_5:

$$E_{34} = \frac{E_4 R_3}{R_3 + R_4} = 5\text{V} \quad R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{1}{2}\Omega \quad I_5 = \frac{E_5 - E_{34}}{R_5 + R_2 + R_{34}} = \frac{8}{5}\Omega$$

Putem acum calcula tensiunea U_{AB0} aplicând a doua teorema a lui Kirchhoff pe traseul *ABOA* din schema din Fig.1.3.R-h.

$$E_6 - E_5 = -JR_6 + U_{AB0} - R_5 I_5 \Rightarrow U_{BD0} = E_6 - E_5 + JR_6 + R_5 I_5 = \frac{13}{5}\text{V}$$

Rezistența echivalentă R_{AB0} reprezintă rezistența circuitului pasivizat între punctele *A* și *B*.

Așa cum se poate observa din Fig.1.3.R-i ea reprezintă rezistența R_{23456} calculată la punctul anterior.

$$R_{23456} = \frac{8}{5}\Omega$$

Generatorul de tensiune între punctele A şi B este format din generatorul de tensiune de valoare U_{AB0} în serie cu rezistenţa R_{AB0}.

Pentru a determina curentul prin rezistenţa R_1 vom conecta această rezistenţă la bornele generatorului format: Fig.1.2.R-j.

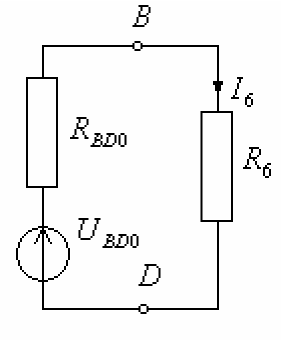

Fig.1.2.R-j

$$I_6 = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0} + R_1} = 1\text{A}$$

Prin urmare valoarea intensităţii curentului ce străbate rezistenţa R_1 este aceeaşi cu cea determinată prin celelalte metode.

Este deci o verificare a justeţii acestei valori.

Transferul maxim de putere

Transferul maxim de putere se obţine conform teoremei de transfer maxim a puterii, în cazul în care valoarea rezistenţei R_1 are aceeaşi valoare ca şi rezistenţa R_{AB0}, adică în momentul în care $R_1 = R_{AB0} = \frac{8}{5}\Omega$.

Curentul prin rezistenţă va fi $I_0 = \frac{U_{AB0}}{2R_{AB0}} = \frac{13}{16}\text{A}$, iar puterea este $P_{\max} = R_{AB0} I_0^2 = \frac{U_{AB0}^2}{4R_{AB0}} = \frac{169}{160}\text{W}$.

1.4.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 1.4.R-a, în care se cunosc E_1=10V, E_2 =4V, E_3=2V, E_4 =6V, J=2A, R_1=1Ω, R_2=2Ω, R_3=3Ω, R_4=4Ω, R_5 =5Ω. Se cer:

a) Curenţii prin fiecare latură a circuitului utilizând atât metoda curenţilor ciclici cât şi metoda potenţialelor la noduri.
b) Valoarea puterilor consumate şi debitate de circuit.

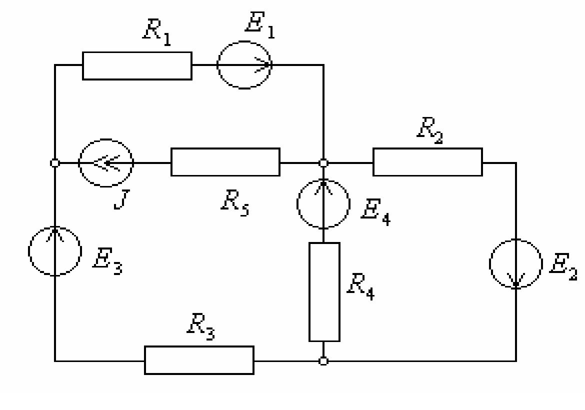

Fig.1.4.R-a

Metoda curenților ciclici

Pentru a aplica metoda curenților ciclici avem mai întâi sensurile curentilor de contur ca în Fig 1.4.R-b.

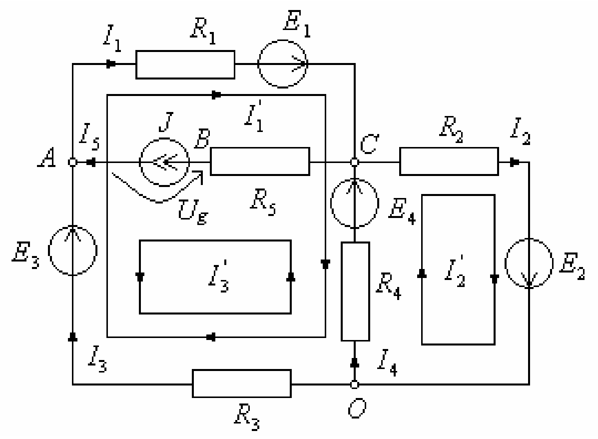

Fig.1.4.R-b Metoda curenților ciclici.

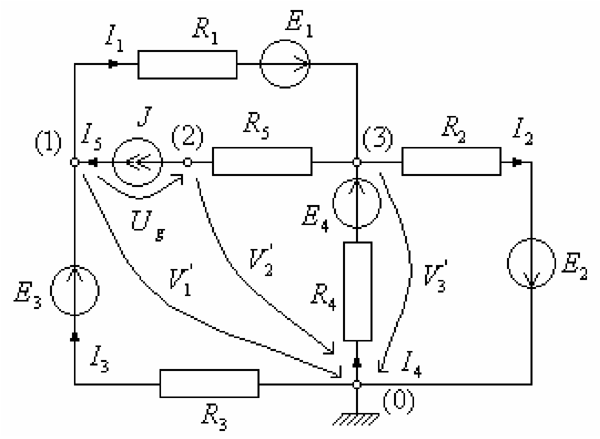

Fig.1.3.R-c Metoda potențialelor la noduri

Ecuațiile prin această metodă vor fi:

$$\begin{cases} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' + R_{13}I_3' = E_1' \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' + R_{23}I_3' = E_2' \\ R_{31}I_1' + R_{32}I_2' + R_{33}I_3' = E_3' \end{cases}$$

Deoarece $R_{33} = \infty$, ultima ecuație din sistemul de mai sus se înlocuieşte cu $I_3' = J = 2\text{A}$. Având în vedere sensurile alese pentru curenții ciclici (Fig.1.4.-b) vom avea:

$$R_{11} = R_2 + R_3 + R_4 = 8\ \Omega; \quad R_{12} = R_{21} = -R_4 = -4\ \Omega; \quad R_{13} = R_{31} = -(R_3 + R_4) = -7\ \Omega;$$
$$R_{22} = R_2 + R_4 = 6\ \Omega; \quad R_{23} = R_{32} = R_4 = 4\ \Omega;$$
$$E_1' = E_1 + E_3 - E_4 = 6\ \text{V}; \quad E_2' = E_2 + E_4 = 10\ \text{V};$$

Cu aceste valori se obține sistemul:

$$\begin{cases} 8I_1' - 4I_2' - 14 = 6 \\ -4I_1' + 6I_2' + 8 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1' = 4\ \text{A} \\ I_2' = 3\ \text{A} \end{cases} I_3' = 2\text{A}$$

Alegem curenții reali prin circuit ca în Fig.1.4.R-b pe care determinăm în funcție de curenții ciclici :

$$I_1 = I_1^{'} = 4\text{A}; \quad I_2 = I_2^{'} = 3\text{A}; \quad I_3 = I_1^{'} - I_3^{'} = 2\text{A};$$
$$I_4 = I_2^{'} + I_3^{'} - I_1^{'} = 1\text{A}; \quad I_5 = I_3^{'} = 2\text{A}.$$

Tensiunea la bornele sursei de curent U_g se poate determina folosind teorema a doua a lui Kirchhoff pe traseul *ABCA:*

$$E_1 = R_1 I_1 + R_5 I_5 - U_g \Rightarrow U_g = R_1 I_1 + R_5 I_5 - E_1 = 4\text{V}$$

Metoda potențialelor la noduri

Alegând ca potențial de referință nodul O (Fig.1.4.R-d) vom avea:

$$\begin{cases} G_{11}V_1^{'} + G_{12}V_2^{'} + G_{13}V_3^{'} = I_{sc1}^{'} \\ G_{21}V_1^{'} + G_{22}V_2^{'} + G_{23}V_3^{'} = I_{sc2}^{'} \\ G_{31}V_1^{'} + G_{32}V_2^{'} + G_{33}V_3^{'} = I_{sc3}^{'} \end{cases}$$

În care $V_1^{'};V_2^{'};V_3^{'}$ reprezintă potențialele electrice ale nodurilor 1, 2 şi 3 față de nodul de referință O .

Conductanțele corespunzătoare vor fi:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\infty} = \frac{4}{3}\text{S}; \quad G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{\infty} = 0\text{S}; \quad G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_1} = -1\text{S};$$
$$G_{22} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{5}\text{S}; \quad G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{R_5} = -\frac{1}{5}\text{S};$$
$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{39}{20}\text{S}$$
$$I_{sc1}^{'} = -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_6}{R_6} + J = -\frac{22}{3}\text{A}; \quad I_{sc2}^{'} = -J = -2\text{A}; \quad I_{sc3}^{'} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_4}{R_4} = \frac{19}{2}\text{A}.$$

Se va obține prin urmare sistemul de ecuații în care necunoscutele reprezintă potențialele nodurilor 1, 2 şi 3 $V_1^{'};V_2^{'};V_3^{'}$.

$$\begin{cases} 4V_1^{'} - 3V_3^{'} = 10 \\ V_2^{'} - V_3^{'} = 9 \\ -20V_1^{'} - 4V_2^{'} + 39V_3^{'} = 190 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1^{'} = -4\text{V} \\ V_2^{'} = -8\text{V} \\ V_3^{'} = 2\text{V} \end{cases}$$

Curenții prin fiecare latură se determină aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe fiecare latură cunoscându-se potențialele între care este cuprinsă fiecare latură:

$$I_1 = \frac{E_1 - V_3' + V_1'}{R_1} = 4\text{A}; \quad I_2 = \frac{E_2 + V_3'}{R_2} = 3\text{A}; \quad I_3 = \frac{E_3 - V_1'}{R_3} = 2\text{A};$$
$$I_4 = \frac{E_4 - V_3'}{R_4} = 1\text{A}; \quad I_5 = J = 2\text{A};$$

Se poate obține acum mult mai uşor tensiunea la bornele sursei de curent $U_g = V_1' - V_2' = 4\text{V}$.

Bilanțul puterilor

Puterea consumată (absorbită), respectiv debitată(generată):

$$P_c = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 70\text{W}$$
$$P_d = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + U_g J = 70\text{W}$$

Cum $P_c = P_d$ ecuația de bilanț a puterilor este satisfacută.

1.5.R Pentru circuitul cu schema din Fig. 1.5.R-a, în care se cunosc E=1V, E_3 =2V, J=3A, R_1= R_2= R_4=1Ω, R_3=2Ω. Se cer:

c) Curenții prin fiecare latură a circuitului utilizând atât metoda curenților ciclici cât şi metoda potențialelor la noduri.
d) Valoarea puterilor consumate şi debitate de circuit.

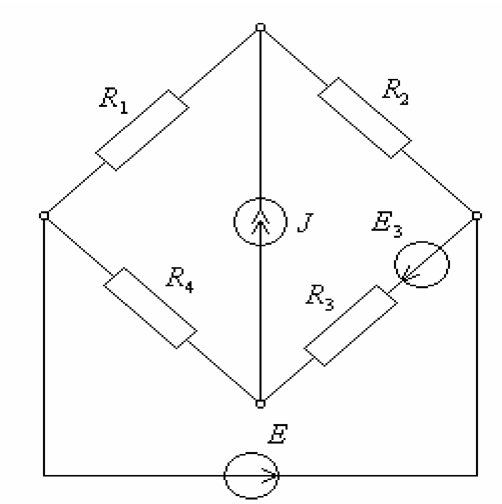

Fig.1.5.R-a

Metoda curenților ciclici

Pentru a aplica metoda curenților ciclici avem mai întâi sensurile curenților de contur ca în Fig 1.5.R-b.

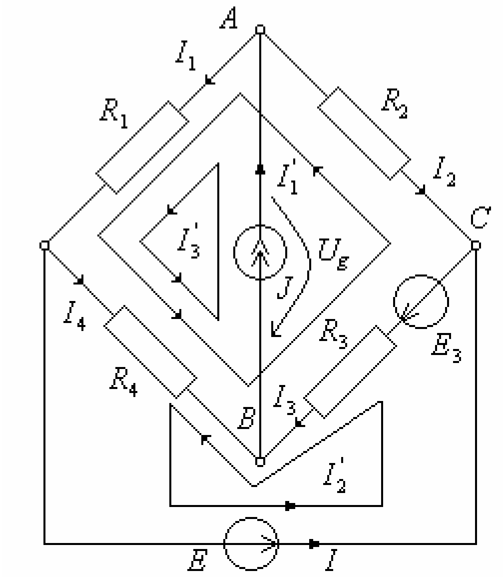

Fig.1.5.R-b Metoda curenților ciclici.

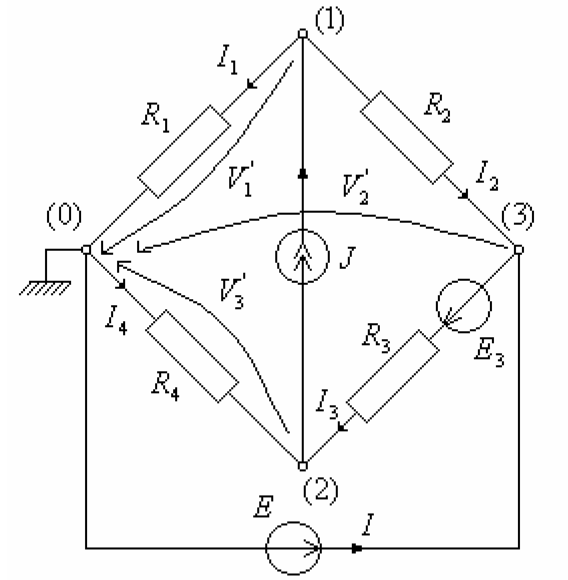

Fig.1.5.R-c Metoda potențialelor la noduri

Ecuațiile prin această metodă vor fi:

$$\begin{cases} R_{11}I_1' + R_{12}I_2' + R_{13}I_3' = E_1' \\ R_{21}I_1' + R_{22}I_2' + R_{23}I_3' = E_2' \\ R_{31}I_1' + R_{32}I_2' + R_{33}I_3' = E_3' \end{cases}$$

Deoarece $R_{33} = \infty$, ultima ecuație din sistemul de mai sus se înlocuieşte cu $I_3' = J = 3\text{A}$. Având în vedere sensurile alese pentru curenții ciclici (Fig.1.4.-b) vom avea:

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 5\,\Omega$; $\quad R_{12} = R_{21} = -(R_3 + R_4) = -3\,\Omega$; $\quad R_{13} = R_{31} = R_1 + R_4 = 2\,\Omega$;
$R_{22} = R_3 + R_4 = 3\,\Omega$; $\quad R_{23} = R_{32} = -R_4 = -1\,\Omega$;
$E_1' = -E_3 = -2\text{ V}$; $\quad E_2' = E_3 + E = 3\text{ V}$;

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} 5I_1' - 3I_2' + 6 = -2 \\ -3I_1' + 3I_2' - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1' = -1\text{ A} \\ I_2' = 1\text{ A} \end{cases} I_3' = 3\text{A}$$

Alegem curenții reali prin circuit ca în Fig.1.4.R-b pe care determinăm în funcție de curenții ciclici :

$$I_1 = I_1^{'} + I_3^{'} = 2\text{A}; \quad I_2 = -I_1^{'} = 1\text{A}; \quad I_3 = I_2^{'} - I_1^{'} = 2\text{A};$$
$$I_4 = I_1^{'} + I_3^{'} - I_2^{'} = 1\text{A}. \quad I = I_3 - I_2 = 1\text{A}$$

Am notat cu I intensitatea curentului electric ce străbate sursa de tensiune E; el se determină uşor aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul C de exemplu.

Tensiunea la bornele sursei de curent U_g se poate determina folosind teorema a doua a lui Kirchhoff pe traseul *AOBA:*

$$0 = R_1 I_1 + R_4 I_4 - U_g \Rightarrow U_g = R_1 I_1 + R_4 I_4 = 3\text{V}$$

Metoda potenţialelor la noduri

Alegând ca potenţial de referinţă nodul O (Fig.1.4.R-d) vom avea:

$$\begin{cases} G_{11}V_1^{'} + G_{12}V_2^{'} + G_{13}V_3^{'} = I_{sc1}^{'} \\ G_{21}V_1^{'} + G_{22}V_2^{'} + G_{23}V_3^{'} = I_{sc2}^{'} \\ G_{31}V_1^{'} + G_{32}V_2^{'} + G_{33}V_3^{'} = I_{sc3}^{'} \end{cases}$$

În care $V_1^{'};V_2^{'};V_3^{'}$ reprezintă potenţialele electrice ale nodurilor 1, 2 şi 3 faţă de nodul de referinţă O.

Datorită alegerii potenţialului de referinţă, valoarea potenţialului din a treia ecuaţie este echivalentă cu $V_3^{'} = E = 1\text{V}$.

Conductanţele corespunzătoare vor fi:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\infty} = 2\text{S}; \quad G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{\infty} = 0\text{S}; \quad G_{13} = G_{31} = -\frac{1}{R_2} = -1\text{S};$$
$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{\infty} = \frac{3}{2}\text{S}; \quad G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{R_3} = -\frac{1}{2}\text{S};$$
$$G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{2}\text{S}$$
$$I_{sc1}^{'} = J = 3\text{A}; \quad I_{sc2}^{'} = \frac{E_3}{R_3} - J = -2\text{A}; \quad I_{sc3}^{'} = -\frac{E_3}{R_3} = -1\text{A}.$$

Se va obţine prin urmare sistemul de ecuaţii în care necunoscutele reprezintă potenţialele nodurilor 1 şi 2 $V_1^{'};V_2^{'}$:

$$\begin{cases} 2V_1^{'} - 1 = 3 \\ \dfrac{3}{2}V_2^{'} - \dfrac{1}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1^{'} = 2\text{V} \\ V_2^{'} = -1\text{V} \end{cases} \quad V_3^{'} = 1\text{V}$$

Curenții prin fiecare latură se determină aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe fiecare latură cunoscându-se potențialele între care este cuprinsă fiecare latură:

$$I_1 = \frac{V_1^{'}}{R_1} = 2\text{A}; \quad I_2 = \frac{V_1^{'} - V_3^{'}}{R_2} = 1\text{A}; \quad I_3 = \frac{V_3^{'} - V_2^{'} + E_3}{R_3} = 2\text{A};$$

$$I_4 = -\frac{V_2^{'}}{R_4} = 1\text{A}; \quad I = 1\text{A};$$

Se poate obține acum mult mai ușor tensiunea la bornele sursei de curent $U_g = V_1^{'} - V_2^{'} = 3\text{V}$.

Bilanțul puterilor

Puterea consumată (absorbită), respectiv debitată (generată):

$$P_c = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 14\text{W}$$
$$P_d = EI + E_3 I_3 + U_g J = 14\text{W}$$

Cum $P_c = P_d$ ecuația de bilanț a puterilor este satisfacută.